DÉRIVATION

I. Calculs de dérivées *Corrigé*

Exercice 1

a) $f(x)=2x+\sqrt{x}$

f est de la forme $u+v$ avec $u(x)=2x$ et $v(x)=\sqrt{x}$; on utilise $(u+v)'=u'+v'$.

b) $f(x)=x\sin x$

f est de la forme uv avec $u(x)=x$ et $v(x)=\sin x$; on utilise $(uv)'=u'v+uv'$.

c) $f(x)=5\left(x^2+5x\right)$

f est de la forme ku avec $k=5$ et $u(x)=x^2+5x$; on utilise $(ku)'=ku'$.

d) $f(x)=\dfrac{5\left(x^2+1\right)}{3}=\dfrac{5}{3}\left(x^2+1\right)$

f est de la forme ku avec $k=\dfrac{5}{3}$ et $u(x)=x^2+1$; on utilise $(ku)'=ku'$.

e) $f(x)=-3x^2(x+1)$

f est de la forme uv avec $u(x)=-3x^2$ et $v(x)=x+1$; on utilise $(uv)'=u'v+uv'$.

f) $f(x)=\dfrac{-3x}{x+1}$

f est de la forme $\dfrac{u}{v}$ avec $u(x)=-3x$ et $v(x)=x+1$; on utilise $\left(\dfrac{u}{v}\right)'=\dfrac{u'v-uv'}{v^2}$.

g) $f(x)=\sin^2 x=(\sin x)^2$

f est de la forme u^n avec $u(x)=\sin x$ et $n=2$; on utilise $\left(u^n\right)'=nu^{n-1}u'$.

h) $f(x)=\cos x-5x^2$

f est de la forme $u+v$ avec $u(x)=\cos x$ et $v(x)=-5x^2$; on utilise $(u+v)'=u'+v'$.

i) $f(x)=\dfrac{1}{4}\left(2x^2+3x\right)$

f est de la forme ku avec $k=\dfrac{1}{4}$ et $u(x)=2x^2+3x$; on utilise $(ku)'=ku'$.

j) $f(x)=2x+1+\dfrac{1}{x}$

f est de la forme $u+v$ avec $u(x)=2x+1$ et $v(x)=\dfrac{1}{x}$; on utilise $(u+v)'=u'+v'$.

k) $f(x)=(2x+5)^3$

f est de la forme u^n avec $u(x)=2x+5$ et $n=3$; on utilise $\left(u^n\right)'=nu^{n-1}u'$.

l) $f(x)=\dfrac{\cos x}{x+1}$

f est de la forme $\dfrac{u}{v}$ avec $u(x)=\cos x$ et $v(x)=x+1$; on utilise $\left(\dfrac{u}{v}\right)'=\dfrac{u'v-uv'}{v^2}$.

Exercice 2 :

a) sur $]0;+\infty[$, $f(x)=\frac{1}{5}\left(x^2+2x+3\right)$. f est de la forme $f=ku$ où $k=\frac{1}{5}$ et $u(x)=x^2+2x+3$.

On a donc $f'=ku'$ avec $k=\frac{1}{5}$ et $u'(x)=2x+2$. Donc $\boxed{f'(x)=\frac{1}{5}(2x+2)}$.

b) sur **R**, $f(x)=\left(3x^2+1\right)(2-x)$. f est de la forme $f=uv$ où $u(x)=3x^2+1$ et $v(x)=2-x$.

Donc $f'(x)=u'(x)v(x)+u(x)v'(x)$ avec $u'(x)=6x$ et $v'(x)=-1$.

Soit $f'(x)=6x(2-x)+\left(3x^2+1\right)\times(-1)=12x-6x^2-3x^2-1$; $\boxed{f'(x)=-9x^2+12x-1}$.

c) sur **R**, $f(x)=\left(x^2-2x+5\right)^3$. f est de la forme $f=u^n$.

Donc $f'(x)=nu(x)^{n-1}u'(x)$ avec $n=3$, $u(x)=x^2-2x+5$ et $u'(x)=2x-2$.

Soit $f'(x)=3\left(x^2-2x+5\right)^2(2x-2)$; $\boxed{f'(x)=(6x-6)\left(x^2-2x+5\right)^2}$.

Exercice 3 :

a) $f(x)=\dfrac{x^2-4x+7}{1-x}$ sur $]1;+\infty[$.

$f=\dfrac{u}{v}$ avec $u(x)=x^2-4x+7$ et $v(x)=1-x$. $f'=\dfrac{u'v-uv'}{v^2}$ avec $u'(x)=2x-4$ et $v'(x)=-1$.

Donc $f'(x)=\dfrac{(2x-4)(1-x)-\left(x^2-4x+7\right)(-1)}{(1-x)^2}=\dfrac{2x-2x^2-4+4x+x^2-4x+7}{(1-x)^2}$;

$\boxed{f'(x)=\dfrac{-x^2+2x+3}{(1-x)^2}}$.

b) $f(x)=\dfrac{1-x}{1+x^3}$ sur $]-1;+\infty[$.

$f=\dfrac{u}{v}$ avec $u(x)=1-x$ et $v(x)=1+x^3$. $f'=\dfrac{u'v-uv'}{v^2}$ avec $u'(x)=-1$ et $v'(x)=3x^2$.

Donc $f'(x)=\dfrac{-1\left(1+x^3\right)-(1-x)\left(3x^2\right)}{\left(1+x^3\right)^2}=\dfrac{-1-x^3-3x^2+3x^3}{\left(1+x^3\right)^2}$; $\boxed{f'(x)=\dfrac{2x^3-3x^2-1}{\left(1+x^3\right)^2}}$.

c) $f(x)=\dfrac{3}{2x^2+1}$ sur **R**.

$f=\dfrac{k}{v}=k\times\dfrac{1}{v}$ avec $k=3$ et $v(x)=2x^2+1$. $f'=k\times\dfrac{-v'}{v^2}$ avec $v'(x)=4x$.

Donc $f'(x)=3\times\dfrac{-4x}{\left(2x^2+1\right)^2}$; $\boxed{f'(x)=\dfrac{-12x}{\left(2x^2+1\right)^2}}$.

d) $f(x)=\dfrac{x}{2}+\dfrac{1}{3x}$ sur $]0;+\infty[$.

$f=ku+\dfrac{1}{v}$ avec $k=\dfrac{1}{2}$, $u(x)=x$ et $v(x)=3x$. $f'=ku'+\dfrac{-v'}{v^2}$ avec $u'(x)=1$ et $v'(x)=3$.

Donc $f'(x)=\dfrac{1}{2}\times1+\dfrac{-3}{(3x)^2}=\dfrac{1}{2}-\dfrac{3}{9x^2}=\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{3x^2}$; $\boxed{f'(x)=\dfrac{3x^2-2}{6x^2}}$.

e) $f(x)=1-\dfrac{1}{x+5}$ sur $]-5;+\infty[$.

$f=k-\dfrac{1}{v}$ avec $k=1$ et $v(x)=x+5$. $f'=-\dfrac{-v'}{v^2}$ avec $v'(x)=1$.

Donc $f'(x)=-\dfrac{-1}{(x+5)^2}$; $\boxed{f'(x)=\dfrac{1}{(x+5)^2}}$.

f) $f(x)=(2x+1)\sqrt{x}$ sur $]0;+\infty[$.

$f=uv$ avec $u(x)=2x+1$ et $v(x)=\sqrt{x}$. $f'=u'v+uv'$ avec $u'(x)=2$ et $v'(x)=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$.

Donc $f'(x)=2\sqrt{x}+(2x+1)\times\dfrac{1}{2\sqrt{x}}=\dfrac{\left(2\sqrt{x}\right)^2+2x+1}{2\sqrt{x}}=\dfrac{4x+2x+1}{2\sqrt{x}}$; $\boxed{f'(x)=\dfrac{6x+1}{2\sqrt{x}}}$.

<u>Exercice 4</u> :

a) sur **R**, $f(x)=x\sin x$. f est de la forme $f=uv$

Donc $f'(x)=u'(x)v(x)+u(x)v'(x)$ avec $\begin{array}{l} u(x)=x \text{ et } v(x)=\sin x \\ u'(x)=1 \text{ et } v'(x)=\cos x \end{array}$

Soit $f'(x)=1\times\sin x+x\cos x$; $\boxed{f'(x)=\sin x+x\cos x}$.

b) sur **R**, $f(x)=\cos^2 x$. f est de la forme $f=u^n$

Donc $f'(x)=nu(x)^{n-1}u'(x)$ avec $n=2$ et $\begin{array}{l} u(x)=\cos x \\ u'(x)=-\sin x \end{array}$

Soit $f'(x)=2\cos x\times(-\sin x)$; $\boxed{f'(x)=-2\cos x\sin x}$.

c) sur $\left]-\dfrac{\pi}{2};\dfrac{\pi}{2}\right[$, $f(x)=\dfrac{\sin x}{\cos x}$. f est de la forme $f=\dfrac{u}{v}$

Donc $f'(x)=\dfrac{u'(x)v(x)-u(x)v'(x)}{v^2(x)}$ avec $\begin{array}{l} u(x)=\sin x \text{ et } v(x)=\cos x \\ u'(x)=\cos x \text{ et } v'(x)=-\sin x \end{array}$

Soit $f'(x)=\dfrac{\cos^2 x+\sin^2 x}{\cos^2 x}$; $\boxed{f'(x)=\dfrac{1}{\cos^2 x}}$.

d) sur $]0;+\infty[$, $f(x)=\dfrac{1+\cos x}{x}$. f est de la forme $f=\dfrac{u}{v}$

Donc $f'(x)=\dfrac{u'(x)v(x)-u(x)v'(x)}{v^2(x)}$ avec $\begin{array}{l} u(x)=1+\cos x \text{ et } v(x)=x \\ u'(x)=-\sin x \text{ et } v'(x)=1 \end{array}$

Soit $f'(x)=\dfrac{-\sin x\times x-(1+\cos x)\times 1}{x^2}=\dfrac{-x\sin x-1-\cos x}{x^2}$; $\boxed{f'(x)=\dfrac{-x\sin x-1-\cos x}{x^2}}$.

II. Étude du signe de la dérivée — *Corrigé*

<u>Exercice 5</u> : Soit g la fonction définie sur **R** par $g(x)=x^3+x^2-x-1$.

$g'(x)=3x^2+2x-1$ qui est un trinôme du second degré.

$\Delta = 2^2 - 4\times 3\times(-1) = 16$. Les racines de $g'(x)$ sont $\dfrac{-2-\sqrt{16}}{2\times 3} = -1$ et $\dfrac{-2+\sqrt{16}}{2\times 3} = \dfrac{1}{3}$.

$g'(x)$ est du signe contraire de 3 (coefficient de x^2) entre ses racines, c'est-à-dire entre -1 et $\dfrac{1}{3}$.

x	$-\infty$		-1		$\frac{1}{3}$		$+\infty$
Signe de $g'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
Variation de g	$-\infty$	$\nearrow$	0	$\searrow$	$-\frac{32}{27}$	$\nearrow$	$+\infty$

<u>Exercice 6</u> : Soit *f* la fonction définie sur **R** par $f(x) = x^3 - 18x^2 + 108x - 80$.

$f'(x) = 3x^2 - 36x + 108 = 3\left(x^2 - 12x + 36\right) = 3(x-6)^2 \geqslant 0$. Donc $\boxed{f \text{ est croissante sur } \mathbf{R}}$.

<u>Exercice 7</u> : Soit *f* la fonction définie et dérivable, de dérivée f' sur $\setminus\left\{\frac{2}{3}\right\}$.

$f'(x) = \dfrac{5x}{3x+2}$. Le signe de $f'(x)$ dépend de celui du numérateur et du dénominateur.

x	$-\infty$		$-\frac{2}{3}$		0		$+\infty$
Signe de $5x$		$-$		$-$	0	$+$	
Signe de $3x+2$		$-$	0	$+$		$+$	
Signe de $f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

<u>Exercice 8</u> : On sait que $f'(x) = \dfrac{x^2+2x+6}{x-1}$.

Le signe de $f'(x)$ dépend de celui du numérateur et du dénominateur.

- $x^2 + 2x + 6$ est un trinôme du second degré ;
  $\Delta = 2^2 - 4\times 1\times 6 = -20 < 0$ donc x^2+2x+6 n'a pas de racines réelles : il est du signe de 1 (coefficient de x^2) pour tout réel *x*, donc strictement positif sur **R**.
- $x-1$ s'annule pour $x=1$.

x	$-\infty$		1		$+\infty$
Signe de x^2+2x+6		$+$		$+$	
Signe de $x-1$		$-$	0	$+$	
Signe de $f'(x)$		$-$	0	$+$	

Exercice 9 : Soit f la fonction dérivable sur $D =]-\infty;-2[\cup]-2;+\infty[$, définie par $f(x) = \dfrac{-x^3}{2(x+2)}$.

$$f = \frac{u}{v} \text{ avec } \begin{cases} u(x) = -x^3 & u'(x) = -3x^2 \\ v(x) = 2(x+2) & v'(x) = 2 \end{cases} \; ; \; f' = \frac{u'v-uv'}{v^2} \text{ donc } f'(x) = \frac{-3x^2 \times 2(x+2) - 2(-x^3)}{\left[2(x+2)\right]^2}$$

$$f'(x) = \frac{2x^2(-3x-6+x)}{4(x+2)^2} = \frac{x^2(-2x-6)}{2(x+2)^2} = \frac{x^2(-x-3)}{(x+2)^2}.$$

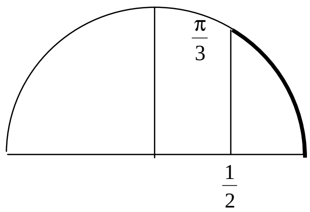
Sur D, $(x+2)^2 > 0$ et $x^2 \geqslant 0$. $f'(x)$ a donc le même signe que $(-x-3)$.

x	$-\infty$		-3		-2		0		$+\infty$
Signe de x^2		$+$	|	$+$	|	$+$	0	$+$	
Signe de $-x-3$		$+$	0	$-$	|	$-$	|	$-$	
Signe de $(x+2)^2$		$+$	|	$+$	0	$+$	|	$+$	
Signe de $f'(x)$		$+$	0	$-$	||	$-$	0	$-$	

Exercice 10 : Soit f la fonction dérivable sur $[0;\pi]$, définie par $f(x) = -\dfrac{1}{2}\cos(2x) + \cos(x) + \dfrac{3}{2}$.

$$f'(x) = -\frac{1}{2}\left[-\sin(2x)\times 2\right] + \left[-\sin(x)\right] = \sin(2x) - \sin(x) = 2\sin(x)\cos(x) - \sin(x) = \sin(x)\left[2\cos(x) - 1\right].$$

Sur $[0;\pi]$, $\sin(x) \geqslant 0$, et $\sin(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$ ou $x = \pi$.



Étudions le signe de $2\cos(x) - 1$ sur $[0;\pi]$:

$2\cos(x) - 1 \geqslant 0$ équivaut à $\cos(x) \geqslant \dfrac{1}{2}$, qui équivaut à $0 \leqslant x \leqslant \dfrac{\pi}{3}$.

x	0		$\frac{\pi}{3}$		π
Signe de $\sin(x)$	0	$+$	|	$+$	0
Signe de $2\cos x - 1$		$+$	0	$-$	
Signe de $f'(x)$	0	$+$	0	$-$	0

III. Équations de tangentes *Corrigé*

Équation d'une tangente

Exercice 11 : f est la fonction définie sur **R** par $f(x) = \sin x$.

Une équation de la tangente au point d'abscisse a est : $y = f'(a)(x-a) + f(a)$.

Ici, $a = \dfrac{\pi}{3}$, $f\left(\dfrac{\pi}{3}\right) = \sin\dfrac{\pi}{3} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ et $f'\left(\dfrac{\pi}{3}\right) = \cos\dfrac{\pi}{3} = \dfrac{1}{2}$.

Donc une équation de la tangente est $y = \dfrac{1}{2}\left(x - \dfrac{\pi}{3}\right) + \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ ce qui donne $\boxed{y = \dfrac{1}{2}x - \dfrac{\pi}{6} + \dfrac{\sqrt{3}}{2}}$.

Exercice 12 : f est la fonction définie sur $\left[-\frac{1}{2}\,;+\infty\right[$ par $f(x)=\sqrt{2x+1}$.

Une équation de la tangente au point d'abscisse a est : $y=f'(a)(x-a)+f(a)$.

Ici, $a=3$, $f(3)=\sqrt{2\times3+1}=\sqrt{7}$; $f'(x)=\frac{2}{2\sqrt{2x+1}}=\frac{1}{\sqrt{2x+1}}$, donc $f'(3)=\frac{1}{\sqrt{2\times3+1}}=\frac{1}{\sqrt{7}}$.

Donc une équation de la tangente est $y=\frac{1}{\sqrt{7}}(x-3)+\sqrt{7}$ ce qui donne $y=\frac{1}{\sqrt{7}}x-\frac{3}{\sqrt{7}}+\sqrt{7}$,

soit $y=\frac{1}{\sqrt{7}}x-\frac{3}{\sqrt{7}}+\frac{7}{\sqrt{7}}$ ce qui donne $\boxed{y=\frac{1}{\sqrt{7}}x+\frac{4}{\sqrt{7}}}$.

Exercice 13 : f est la fonction définie sur $\left]-\infty\,;\frac{1}{3}\right[$ par $f(x)=\frac{5}{3x-1}$.

Une équation de la tangente au point d'abscisse a est : $y=f'(a)(x-a)+f(a)$.

Ici, $a=-1$, $f(-1)=\frac{5}{3\times(-1)-1}=-\frac{5}{4}$; $f'(x)=5\times\left(-\frac{3}{(3x-1)^2}\right)=-\frac{15}{(3x-1)^2}$, donc $f'(-1)=-\frac{15}{16}$.

Donc une équation de la tangente est $y=-\frac{15}{16}(x+1)-\frac{5}{4}$ ce qui donne $\boxed{y=-\frac{15}{16}x-\frac{35}{16}}$.

Position d'une courbe par rapport à sa tangente

Exercice 14 : f est la fonction définie sur $]0\,;+\infty[$ par $f(x)=2x-1+\frac{3}{x}$.

Une équation de la tangente au point d'abscisse a est : $y=f'(a)(x-a)+f(a)$.

Ici, $a=1$, $f(1)=4$; $f'(x)=2-\frac{3}{x^2}$, donc $f'(1)=-1$.

Donc une équation de la tangente est $y=-1(x-1)+4$ ce qui donne $y=-x+5$.
Pour étudier la position de la courbe par rapport à la tangente *T*, on étudie le signe de la différence $f(x)-(-x+5)$.

$f(x)-(-x+5)=2x-1+\frac{3}{x}+x-5=3x-6+\frac{3}{x}=\frac{3x^2-6x+3}{x}=\frac{3(x-1)^2}{x}$.

Sur l'ensemble de définition de f, $D_f=]0\,;+\infty[$, $x>0$, et $(x-3)^2\geqslant 0$, donc $f(x)-(-x+5)\geqslant 0$, c'est à dire $f(x)\geqslant -x+5$ et la courbe C est au dessus de la tangente T.

Exercice 15 : f est la fonction définie sur **R** par $f(x)=x^3-5x^2+3x+1$.
Une équation de la tangente au point d'abscisse a est : $y=f'(a)(x-a)+f(a)$.
Ici, $a=0$, $f(0)=1$;
$f'(x)=3x^2-10x+3$, donc $f'(0)=3$.
Donc une équation de la tangente est $y=3(x-0)+1$ ce qui donne $y=3x+1$.
Pour étudier la position de la courbe par rapport à la tangente *T*, on étudie le signe de la différence $f(x)-(3x+1)$.

$f(x)-(3x+1)=x^3-5x^2+3x+1-3x-1=x^3-5x^2=x^2(x-5)$.

x	$-\infty$		0		5		$+\infty$
x^2		$+$	0	$+$		$+$	
$x-5$		$-$		$-$	0	$+$	
$f(x)-(3x+1)$		$-$	0	$-$	0	$+$	

Sur $\left]-\infty\,;0\right[$ et sur $\left]0\,;5\right[$, $f(x)-(3x+1)<0$; c'est à dire $f(x)<3x+1$ donc la courbe *C* est au dessous de la tangente T ;
sur $\left]5;+\infty\right[$, $f(x)-(3x+1)>0$; c'est à dire $f(x)>3x+1$ donc la courbe *C* est au dessus de la tangente T ;
C et *T* ont deux points communs d'abscisse 0 et 5.

Exercice 16 : *f* est la fonction définie sur $\left]-\infty\,;2\right[$ par $f(x)=\dfrac{4x+1}{x-2}$.

Une équation de la tangente au point d'abscisse *a* est : $y=f'(a)(x-a)+f(a)$.

Ici, $a=1$, $f(1)=-5$; $f'(x)=\dfrac{4(x-2)-(4x+1)\times 1}{(x-2)^2}=-\dfrac{9}{(x-2)^2}$, donc $f'(1)=-9$.

Donc une équation de la tangente est $y=-9(x-1)-5$ ce qui donne $y=-9x+4$.
Pour étudier la position de la courbe par rapport à la tangente *T*, on étudie le signe de la différence $f(x)-(-9x+4)$.

$$f(x)-(-9x+4)=\frac{4x+1}{x-2}-(-9x+4)=\frac{4x+1-(x-2)(-9x+4)}{x-2}=\frac{4x+1+9x^2-4x-18x+8}{x-2}$$
$$=\frac{9x^2-18x+9}{x-2}=\frac{9(x-1)^2}{x-2}.$$

Sur l'ensemble de définition de *f*, $\left]-\infty\,;2\right[$, $x-2<0$, et $(x-1)^2\geqslant 0$, donc $f(x)-(-9x+4)\leqslant 0$, c'est à dire $f(x)\leqslant -9x+4$ et la courbe *C* est au dessous de la tangente *T*.

Tangente parallèle à une droite donnée

Exercice 17 : f est la fonction définie sur **R** par $f(x)=x^3-5x^2+x+1$.
Le coefficient directeur de la tangente *T* à la courbe *C* au point *a* est le nombre dérivé $f'(a)$; le coefficient directeur de la droite *D* est -6.
La tangente *T* et la droite *D* sont parallèles si et seulement si elles ont le même coefficient directeur, c'est à dire si et seulement si $f'(a)=-6$.

$f'(x)=3x^2-10x+1$.

$f'(a)=-6 \Leftrightarrow 3a^2-10a+1=-6 \Leftrightarrow 3a^2-10a+7=0$.(*)

Le discriminant du trinôme $3a^2-10a+7$ est $\Delta=100-4\times3\times7=16$. Donc l'équation (*) a deux solutions réelles : $a_1=\dfrac{10-4}{6}=1$ et $a_2=\dfrac{10+4}{6}=\dfrac{7}{3}$.
Il existe donc deux points de *C* en lesquels la tangente est parallèle à la droite *D*, ce sont les points d'abscisse 1 et $\dfrac{7}{3}$.

Exercice 18 : *f* est la fonction définie sur **R** \ {3} par $f(x)=\dfrac{4x+7}{x+3}$.

Le coefficient directeur de la tangente *T* à la courbe *C* au point *a* est le nombre dérivé $f'(a)$; le coefficient directeur de la droite *D* est -5.
La tangente *T* et la droite *D* sont parallèles si et seulement si elles ont le même coefficient directeur, c'est à dire si et seulement si $f'(a)=-5$.

$f'(x)=\dfrac{4(x+3)-1(4x+7)}{(x+3)^2}=\dfrac{5}{(x+3)^2}$. Pour tout *x* de **R** \ {3} , $f'(x)>0$

Donc l'équation $f'(x)=-5$ n'a pas de solution et il n'existe aucun point de la courbe en lequel la tangente est parallèle à la droite *D*.

Tangente passant par l'origine du repère

Exercice 19 : f est la fonction définie sur **R** par $f(x)=\sqrt{x^2+1}$.
Une équation de la tangente au point d'abscisse a est : $y=f'(a)(x-a)+f(a)$.
La tangente passe par l'origine O (0 ; 0) du repère si et seulement si les coordonnées du point O vérifient l'équation de la tangente : $0=f'(a)(0-a)+f(a)$, c'est à dire $-af'(a)+f(a)=0$.

Ici, $f'(x)=\dfrac{2x}{\sqrt{x^2+1}}=\dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}$.

$$-af'(a)+f(a)=0 \Leftrightarrow -a\times\frac{a}{\sqrt{a^2+1}}+\sqrt{a^2+1}=0 \Leftrightarrow \frac{-a^2}{\sqrt{a^2+1}}+\sqrt{a^2+1}=0 \Leftrightarrow \frac{-a^2+\left(\sqrt{a^2+1}\right)^2}{\sqrt{a^2+1}}=0$$

$\Leftrightarrow -a^2+a^2+1=0 \Leftrightarrow 1=0$.
Cette équation n'a pas de solution, dans il n'existe aucune tangente passant par l'origine du repère.

Exercice 20 : f est la fonction définie sur **R** par $f(x)=(2x-1)^3$.
Une équation de la tangente au point d'abscisse a est : $y=f'(a)(x-a)+f(a)$.
La tangente passe par l'origine O (0 ; 0) du repère si et seulement si les coordonnées du point O vérifient l'équation de la tangente : $0=f'(a)(0-a)+f(a)$, c'est à dire $-af'(a)+f(a)=0$.
Ici, $f'(x)=3(2x-1)^2\times 2=6(2x-1)^2$

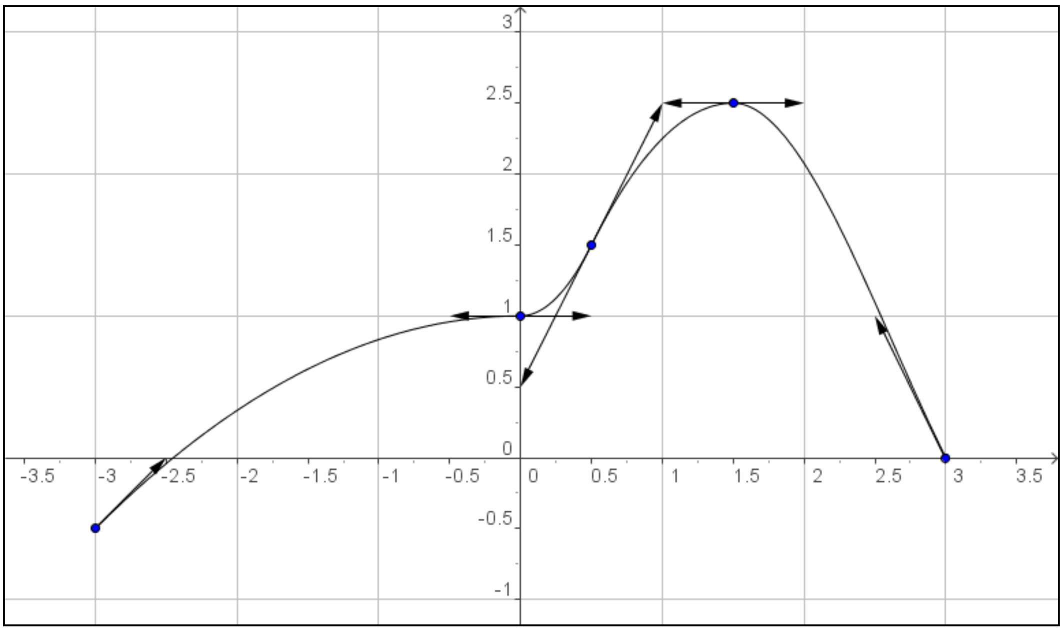
$$-af'(a)+f(a)=0 \Leftrightarrow -a\times 6(2a-1)^2+(2a-1)^3=0 \Leftrightarrow (2a-1)^2\left[-6a+(2a-1)\right]=0$$

$$\Leftrightarrow (2a-1)^2(-4a-1)=0 \Leftrightarrow 2a-1=0 \text{ ou } -4a-1=0 \Leftrightarrow a=\frac{1}{2} \text{ ou } a=-\frac{1}{4}.$$

Il existe donc deux points de la courbe pour lesquels la tangente passe par l'origine : ce sont les points d'abscisse $\dfrac{1}{2}$ et $-\dfrac{1}{4}$.

IV. Lectures graphiques *Corrigé*

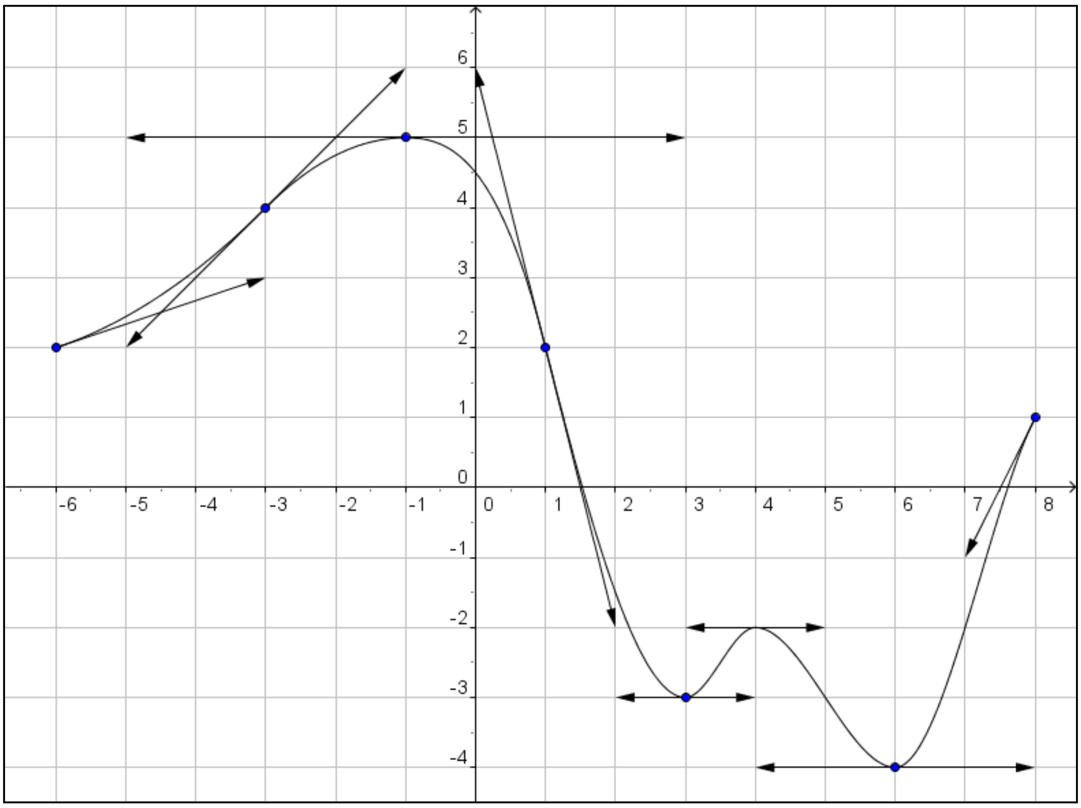
Exercice 21 : La courbe représentative de la fonction f définie sur $[-3;3]$ est donnée ci-dessous.



$f'(x)$ est le coefficient directeur de la tangente à la courbe au point d'abscisse x. On lit :

$f'(-3)=1$; $f'(0)=0$; $f'\left(\dfrac{1}{2}\right)=2$; $f'\left(\dfrac{3}{2}\right)=0$; $f'(3)=-2$.

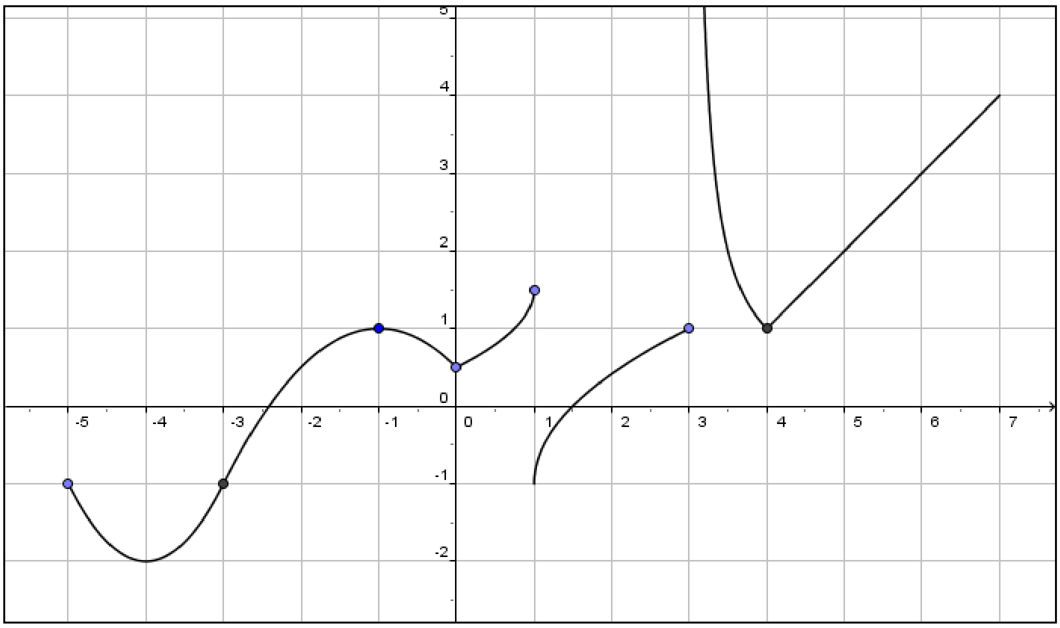
Exercice 22 : La courbe représentative de la fonction f définie sur $[-6;8]$ est donnée ci-dessous.



Le tableau de signe de la fonction dérivée de f est le suivant :

x	-6		-3		-1		1		3		4		6		8
Signe de f'	$\frac{1}{3}$	$+$	1	$+$	0	$-$	-4	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	2

Exercice 23 : La courbe représentative de la fonction f est donnée ci-dessous.

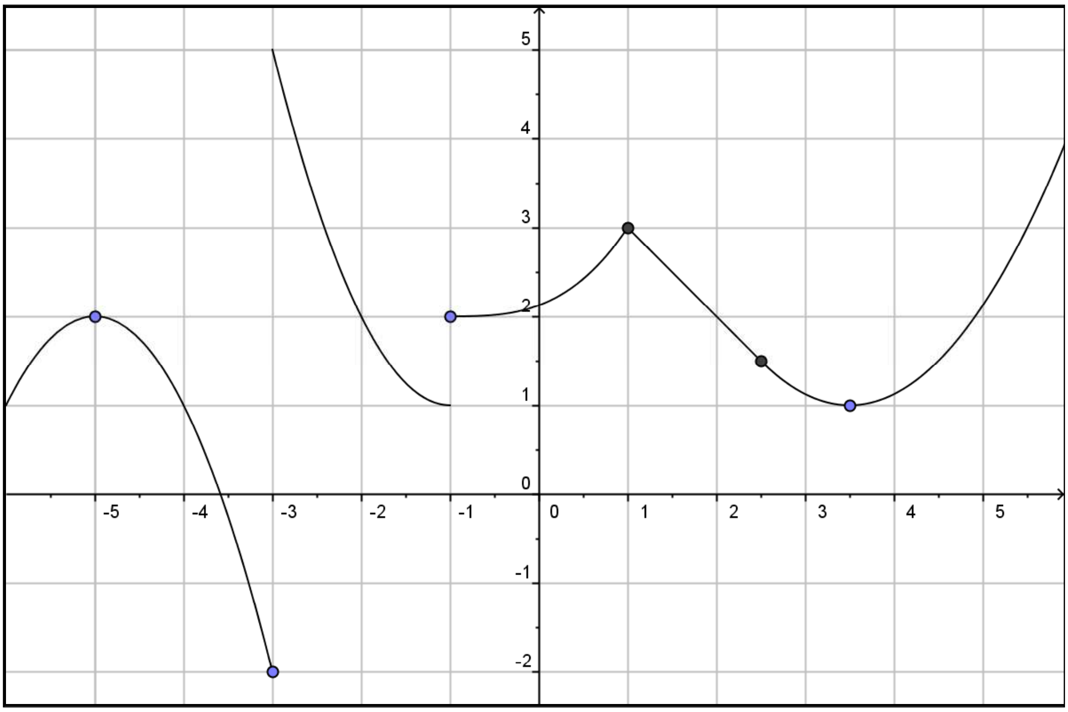


1) a) La fonction est continue en -3 car la courbe est tracée sans discontinuité au point d'abscisse -3.
   b) La fonction est continue en -1 car la courbe est tracée sans discontinuité au point d'abscisse -1.
   c) La fonction est continue en 0 car la courbe est tracée sans discontinuité au point d'abscisse 0.
   d) La fonction n'est pas continue en 1 car la courbe est discontinue au point d'abscisse 1 : on doit lever le crayon.

e) La fonction n'est pas continue en 3 car la courbe est discontinue au point d'abscisse 3 : on doit lever le crayon.
f) La fonction est continue en 4 car la courbe est tracée sans discontinuité au point d'abscisse 4.

2) a) La fonction est dérivable en -3 car la courbe admet une tangente au point d'abscisse -3 ($f'(-3)=2$).
b) La fonction est dérivable en -1 car la courbe admet une tangente au point d'abscisse -1 ($f'(-1)=0$).
c) La fonction n'est pas dérivable en 0 car la courbe admet deux demi-tangentes différentes au point d'abscisse 0.
d) La fonction n'est pas continue en 1 donc n'est pas dérivable en 1.
e) La fonction n'est pas continue en 3 donc n'est pas dérivable en 3.
f) La fonction n'est pas dérivable en 4 car la courbe admet deux demi-tangentes différentes au point d'abscisse 4.

<u>Exercice 24</u> : La courbe représentative de la fonction *f* est donnée ci-dessous.



1) a) La fonction est continue en -5 car la courbe est tracée sans discontinuité (sans lever le crayon).
b) La fonction n'est pas continue en -3 car la courbe est discontinue au point d'abscisse -3 : on doit lever le crayon pour tracer la courbe.
c) La fonction n'est pas continue en -1 car la courbe est discontinue au point d'abscisse -1 : on doit lever le crayon pour tracer la courbe.
d) La fonction est continue en 1 car la courbe est tracée sans discontinuité (sans lever le crayon).
e) La fonction est continue en 2,5 car la courbe est tracée sans discontinuité (sans lever le crayon).
f) La fonction est continue en 3,5 car la courbe est tracée sans discontinuité (sans lever le crayon).

2) a) La fonction est dérivable en -5 car la courbe admet une tangente au point d'abscisse -5 ($f'(-5)=0$).
b) La fonction n'est pas dérivable en -3 car la fonction n'est pas continue en -3.
c) La fonction n'est pas dérivable en -1 car la fonction n'est pas continue en -1.

d) La fonction n’est pas dérivable en 1 car la courbe admet deux demi-tangentes différentes au point d’abscisse 1.
e) La fonction est dérivable en 2,5 car la courbe admet une tangente au point d’abscisse 2,5 ($f'(2,5) = -1$).
f) La fonction est dérivable en 3,5 car la courbe admet une tangente au point d’abscisse 3,5 ($f'(3,5) = 0$).

V. Théorème de la valeur intermédiaire ou de la bijection *corrigé*

<u>Exercice 25</u> : f est la fonction définie par $f(x) = 3x^3 + 6x^2 + 1$.
On sait que f est strictement décroissante sur $\left[-1;0\right]$.
De plus f est une fonction polynôme donc f est continue sur **R** donc sur $\left[-1;0\right]$.
$f(0) = 1$ et $f(-1) = -3 + 6 + 1 = 4$ donc $2 \in \left[f(0); f(-1)\right]$.
Donc , d’après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, l’équation $f(x) = 2$ admet une unique solution dans $\left[-1;0\right]$.

<u>Exercice 26</u> : f est définie sur **R** par $f(x) = x^3 + 2x + 1$.
f est une fonction polynôme donc f est continue sur **R**.
De plus d’après le tableau de variation, on sait que f est strictement croissante sur **R**.
$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ donc $0 \in \left]\lim\limits_{x\to-\infty} f(x); \lim\limits_{x\to+\infty} f(x)\right[$.
Donc , d’après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires l’équation $f(x) = 0$ admet une unique solution dans **R**.

<u>Exercice 27</u> : f est la fonction définie sur $\mathbf{R} \setminus \{4\}$; son tableau de variation est donné ci-dessous.

x	$-\infty$		1		4		6		7
$f(x)$	$-\infty$	↗	2	↘	$\frac{1}{2}$ ‖ -5		↗		$+\infty$

Le tableau de variation de f nous indique que sur $\left]-\infty;1\right[$ et sur $\left]4;7\right[$ f est continue et strictement croissante, et sur $\left]1;4\right[$ f est continue et strictement décroissante. On peut donc utiliser le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires sur chacun de ces intervalles.
a) $f(x) = 0$ admet deux solutions :
une dans $\left]-\infty;1\right[$ car $0 \in \left]-\infty;2\right[$ et une dans $\left]4;7\right[$ car $0 \in \left]-5;+\infty\right[$.
b) $f(x) = 4$ admet une solution dans $\left]4;7\right[$ car $4 \in \left]-5;+\infty\right[$.
c) $f(x) = -7$ admet une solution dans $\left]-\infty;1\right[$ car $-7 \in \left]-\infty;2\right[$.

<u>Exercice 28</u> : Soit f la fonction définie sur **R** par $f(x) = 2x^3 + x + 1$.
1) f est une fonction polynôme donc f est dérivable sur **R** et pour tout réel x, on a : $f'(x) = 6x^2 + 1$.
Pour tout réel x , $6x^2 \geqslant 0$ donc $6x^2 + 1 > 0$. f est donc strictement croissante sur **R**.

$\lim\limits_{x \to -\infty} \left(2x^3 + x + 1\right) = \lim\limits_{x \to -\infty} 2x^3 = -\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(2x^3 + x + 1\right) = \lim\limits_{x \to +\infty} 2x^3 = +\infty$.

Sur **R**, f est strictement croissante et continue (c'est une fonction polynôme) .

$0 \in \left] \lim\limits_{x \to -\infty} f(x) ; \lim\limits_{x \to +\infty} f(x) \right[$ donc, d'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution dans **R**.

2) On a donc

x	$-\infty$		α		$+\infty$
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

D'après le tableau de variation de f : $f(x) < 0$ sur $\left]-\infty ; \alpha\right[$, $f(\alpha) = 0$, $f(x) > 0$ sur $\left]\alpha ; +\infty\right[$.