INTÉGRATION

I. Détermination de primitives *Corrigé*

Exercice 1 :

1. On dérive $F(x)=x-\ln\left(1+\mathrm{e}^x\right)$:

$$F'(x)=1-\frac{\mathrm{e}^x}{1+\mathrm{e}^x}=\frac{1+\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^x}{1+\mathrm{e}^x}=\frac{1}{1+\mathrm{e}^x}=f(x)$$; F est donc bien une primitive de f sur **R**.

2. On dérive $F(x)=2\sqrt{\mathrm{e}^x}$:

$$F'(x)=2\times\frac{\mathrm{e}^x}{2\sqrt{\mathrm{e}^x}}=\frac{\sqrt{\mathrm{e}^x}^2}{\sqrt{\mathrm{e}^x}}=\sqrt{\mathrm{e}^x}=f(x)$$; F est donc bien une primitive de f sur **R**.

Exercice 2 : *Primitives de sommes de fonctions usuelles*

$f_1(x)=4x^3+3x^2+2x+1$ sur $I=\mathbf{R}$

$F_1(x)=4\times\frac{x^4}{4}+3\times\frac{x^3}{3}+2\times\frac{x^2}{2}+x=x^4+x^3+x^2+x$ car $F_1'=f_1$

$f_2(x)=6x^5+4x^3-1$ sur $I=\mathbf{R}$

$F_2(x)=6\times\frac{x^6}{6}+4\times\frac{x^4}{4}-x=x^6+x^4-x$ car $F_2'=f_2$

$f_3(x)=x^3+x^2+x+1$ sur $I=\mathbf{R}$

$F_3(x)=\frac{x^4}{4}+\frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}+x$ car $F_3'=f_3$

$f_4(x)=4x^7-x^6-\frac{2}{3}x-5$ sur $I=\mathbf{R}$

$F_4(x)=4\times\frac{x^8}{8}-\frac{x^7}{7}-\frac{2}{3}\times\frac{x^2}{2}-5x=\frac{x^8}{2}-\frac{x^7}{7}-\frac{x^2}{3}-5x$ car $F_4'=f_4$

$f_5(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}}+9$ sur $I=]0;+\infty[$

$F_5(x)=\sqrt{x}+9x$ car $F_5'=f_5$

$f_6(x)=\sin x-3\cos x$ sur $I=\mathbf{R}$

$F_6(x)=-\cos x-3\sin x$ car $F_6'=f_6$

$f_7(x)=\frac{2}{x}$ sur $I=\mathbf{R}^*$

$F_7(x)=2\times\ln|x|$ car $F_7'=f_7$

$f_8(x)=-\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x}-\mathrm{e}^x$ sur $I=\mathbf{R}^*$

$F_8(x)=\frac{1}{x}+\ln|x|-\mathrm{e}^x$ car $F_8'=f_8$

Exercice 3 : *Primitives de* $\frac{u'}{u}$, $\frac{u'}{u^2}$ et $u'\mathrm{e}^u$

- $f_1(x)=\frac{2x}{x^2+1}$ sur $I=\mathbf{R}$: f_1 est de la forme $-\frac{u'}{u}$ avec $u(x)=x^2+1>0$.

  Une primitive de f_1 est donc $F_1(x)=\ln u(x)=\ln(x^2+1)$ sur **R**.

- $f_2(x)=\frac{4x^3}{(x^4+1)^2}$ sur $I=\mathbf{R}$: f_2 est de la forme $\frac{u'}{u^2}$ avec $u(x)=x^4+1>0$.

  Une primitive de f_2 est donc $F_2(x)=-\frac{1}{u(x)}=-\frac{1}{x^4+1}$ sur **R**.

- $f_3(x)=3x\,\mathrm{e}^{3x^2+1}=\frac{1}{2}\times 6x\,\mathrm{e}^{3x^2+1}$ sur $I=\mathbf{R}$: f_3 est de la forme $\frac{1}{2}u'\mathrm{e}^u$ avec $u(x)=3x^2+1$.

  Une primitive de f_3 est donc $F_3(x)=\frac{1}{2}\mathrm{e}^{u(x)}=\frac{\mathrm{e}^{3x^2-1}}{2}$ sur **R**.

- $f_4(x)=\frac{\mathrm{e}^x}{(\mathrm{e}^x+1)^2}$ sur $I=\mathbf{R}$: f_4 est de la forme $\frac{u'}{u^2}$ avec $u(x)=\mathrm{e}^x+1$.

  Une primitive de f_4 est donc $F_4(x)=-\frac{1}{u(x)}=-\frac{1}{\mathrm{e}^x+1}$ sur $\mathbb{R}$.

- $f_5(x)=\frac{\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^x+3}$ sur $I=\mathbf{R}$: f_5 est de la forme $\frac{u'}{u}$ avec $u(x)=\mathrm{e}^x+3$.

  Une primitive de f_5 est donc $F_5(x)=\ln|u(x)|=\ln(\mathrm{e}^x+3)$ car $\mathrm{e}^x+3>0$ sur **R**.

- $f_6(x)=\cos x\,\mathrm{e}^{\sin x}$ sur $I=\mathbf{R}$: f_6 est de la forme $u'\mathrm{e}^u$ avec $u(x)=\sin x$.

  Une primitive de f_6 est donc $F_6(x)=\mathrm{e}^{u(x)}=\mathrm{e}^{\sin x}$ sur **R**.

Exercice 4 :

On a $f(x)=\frac{x}{x^2+4}=\frac{1}{2}\times\frac{2x}{x^2+4}$. La fonction est de la forme $\frac{1}{2}\times\frac{u'}{u}$ avec $u(x)=x^2+4$.

Les primitives de f sur **R**, sont donc de la forme $F(x)=\frac{1}{2}\ln(x^2+4)+C$, $C\in\mathbf{R}$.

Exercice 5 :

1. Les primitives de la fonction cosinus sont de la forme $F(x)=\sin x+C$, $C\in\mathbf{R}$..

   On cherche alors C tel que $F\left(\frac{\pi}{2}\right)=0$. On a $F\left(\frac{\pi}{2}\right)=\sin\frac{\pi}{2}+C=1+C$.

   Il faut donc que $C=-1$ et la primitive cherchée est $F(x)=\sin x-1$.

2. On a $f(x)=\frac{1}{3}\times 3\mathrm{e}^{3x+1}$. La fonction est de la forme $\frac{1}{3}\times u'\mathrm{e}^u$ avec $u(x)=3x+1$.

   Les primitives de la fonction f sont donc de la forme $F(x)=\mathrm{e}^{3x+1}+C$, $C\in\mathbf{R}$.

   On cherche alors C tel que $F(-1)=0$. On a $F(-1)=\mathrm{e}^{3\times(-1)+1}+C=\mathrm{e}^{-2}+C=\frac{1}{\mathrm{e}^2}+C$.

   Il faut donc que $C=-\frac{1}{\mathrm{e}^2}$ et la primitive cherchée est $F(x)=\mathrm{e}^{3x+1}-\frac{1}{\mathrm{e}^2}$

3. On a $f(x)=-\frac{1}{2}\times(-2x)\mathrm{e}^{-x^2}$. La fonction est de la forme $-\frac{1}{2}\times u'\mathrm{e}^{u}$ avec $u(x)=-x^2$.

Les primitives de la fonction f sont donc de la forme $F(x)=-\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-x^2}+C,\quad C\in\mathbf{R}$.

On cherche alors C tel que $F\left(\sqrt{\ln 2}\right)=1$.

On a $F\left(\sqrt{\ln 2}\right)=-\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-\sqrt{\ln 2}^2}+C=-\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-\ln 2}+C=-\frac{1}{2\mathrm{e}^{\ln 2}}+C=-\frac{1}{4}+C=1.$

Il faut donc que $C=\frac{5}{4}$ et la primitive cherchée est $F(x)=-\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-x^2}+\frac{5}{4}$.

Exercice 6 : f est la fonction définie sur $]2;+\infty[$ par $f(x)=\frac{2x^2-3x-4}{x-2}$.

a) $ax+b+\frac{c}{x-2}=\frac{(ax+b)(x-2)+c}{x-2}=\frac{ax^2-2ax+bx-2b+c}{x-2}=\frac{ax^2+(b-2a)x+c-2b}{x-2}$.

Pour que ce quotient soit égal à $f(x)$, il suffit que : $\begin{cases}a=2\\ b-2a=-3\\ c-2b=-4\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=2\\ b=-3+2\times 2=1\\ c=-4+2\times 1=-2\end{cases}$.

On en déduit que $f(x)=2x+1-\frac{2}{x-2}$.

b) Comme $f(x)=2x+1-\frac{2}{x-2}=2x+1-2\times\frac{1}{x-2}$, une primitive de f sur $]2;+\infty[$ est $F(x)=x^2+x-2\ln(x-2)$.

II. Calcul d'intégrales *Corrigé*

À l'aide des primitives

Exercice 7 :

a) $\int_{-1}^{1}\left(t^2+4t+3\right)\mathrm{d}t=\left[\frac{t^3}{3}+4\times\frac{t^2}{2}+3t\right]_{-1}^{1}=\left[\frac{t^3}{3}+2t^2+3t\right]_{-1}^{1}=\left(\frac{1}{3}+2+3\right)-\left(\frac{-1}{3}+2-3\right)=\frac{20}{3}$.

b) $\int_{1}^{2}\left(\frac{1}{2t}-\frac{3}{t^2}\right)\mathrm{d}t=\int_{1}^{2}\left(\frac{1}{2}\times\frac{1}{t}+3\times\left(-\frac{1}{t^2}\right)\right)\mathrm{d}t=\left[\frac{1}{2}\ln t+3\times\frac{1}{t}\right]_{1}^{2}=\frac{1}{2}\ln 2+\frac{3}{2}-\left(\frac{1}{2}\ln 1+3\right)=\frac{1}{2}\ln 2-\frac{3}{2}$.

c) $\int_{\ln 2}^{\ln 3}\mathrm{e}^{x}\mathrm{d}x=\left[\mathrm{e}^{x}\right]_{\ln 2}^{\ln 3}=\mathrm{e}^{\ln 3}-\mathrm{e}^{\ln 2}=1$.

d) $\int_{1}^{2}\sqrt{t}\,\mathrm{d}t=\int_{1}^{2}t^{\frac{1}{2}}\mathrm{d}t=\left[\frac{t^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\right]_{1}^{2}=\left[\frac{2}{3}t^{\frac{3}{2}}\right]_{1}^{2}=\frac{2}{3}\left(2^{\frac{3}{2}}-1\right)=\frac{2}{3}\left(2\sqrt{2}-1\right)$.

e) $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}}(\cos x-\sin x)\,\mathrm{d}x=\left[\sin x+\cos x\right]_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}}=\left(\sin\frac{\pi}{2}+\cos\frac{\pi}{2}\right)-\left(\sin\frac{\pi}{6}+\cos\frac{\pi}{6}\right)=1-\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=\frac{1-\sqrt{3}}{2}$.

f) $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}\frac{\mathrm{d}x}{\cos^2 x}=\left[\tan x\right]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}=\sqrt{3}-1$.

Exercice 8 :

a) $\int_0^{\ln 3} \mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t = \left[-\mathrm{e}^{-t}\right]_0^{\ln 3} = -\mathrm{e}^{-\ln 3} - \left(-\mathrm{e}^0\right) = -\dfrac{1}{3} + 1 = \dfrac{2}{3}$.

Pour toute la suite, on note f la fonction à intégrer, F une primitive de f et I l'intégrale à calculer.

b) $\displaystyle\int_0^2 \frac{x}{\left(x^2+1\right)^2}\mathrm{d}x$: soit $u(x) = x^2+1$; alors $u'(x) = 2x$.

$$f(x) = \frac{x}{\left(x^2+1\right)^2} = \frac{1}{2}\times\frac{2x}{\left(x^2+1\right)^2} = \frac{1}{2}\times\frac{u'(x)}{\left(u(x)\right)^2} \text{ donc } F(x) = \frac{1}{2}\times\left(-\frac{1}{u(x)}\right) = -\frac{1}{2\left(x^2+1\right)}$$

$$I = \left[-\frac{1}{2\left(x^2+1\right)}\right]_0^2 = -\frac{1}{10} - \left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{2}{5}.$$

c) $\displaystyle\int_0^{-1} \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{1-2t}}$: soit $u(t) = 1-2t$; alors $u'(t) = -2$.

$$f(t) = \frac{1}{\sqrt{1-2t}} = -\frac{1}{2}\times\frac{-2}{\sqrt{1-2t}} = -\frac{u'(t)}{2\sqrt{u(t)}} \text{ donc } F(t) = -\sqrt{u(t)} = -\sqrt{1-2t}$$

$$I = \left[-\sqrt{1-2t}\right]_0^{-1} = -\sqrt{3} - (-1) = 1-\sqrt{3}.$$

d) $\displaystyle\int_1^2 \frac{\mathrm{d}x}{3x+2}$: soit $u(x) = 3x+2$; alors $u'(x) = 3$.

$$f(x) = \frac{1}{3x+2} = \frac{1}{3}\times\frac{3}{3x+2} = \frac{1}{3}\times\frac{u'(x)}{u(x)} \text{ donc } F(x) = \frac{1}{3}\ln\left(u(x)\right) = \frac{1}{3}\ln(3x+2)$$

$$I = \left[\frac{1}{3}\ln(3x+2)\right]_1^2 = \frac{1}{3}\left(\ln 8 - \ln 5\right) = \frac{1}{3}\ln\frac{8}{5}.$$

e) $\displaystyle\int_{\frac{1}{\mathrm{e}}}^{\mathrm{e}} \frac{\ln t}{t}\mathrm{d}t$: soit $u(t) = \ln t$; alors $u'(t) = \dfrac{1}{t}$.

$$f(t) = \frac{\ln t}{t} = \ln t\times\frac{1}{t} = u(t)\times u'(t) \text{ donc } F(t) = \frac{\left(u(t)\right)^2}{2} = \frac{(\ln t)^2}{2}$$

$$I = \left[\frac{(\ln t)^2}{2}\right]_{\frac{1}{\mathrm{e}}}^{\mathrm{e}} = \frac{1}{2}\left((\ln \mathrm{e})^2 - \left(\ln\frac{1}{\mathrm{e}}\right)^2\right) = 0.$$

f) $\int_0^1 \sqrt{2-t}\,\mathrm{d}t$: soit $u(t) = 2-t$; alors $u'(t) = -1$.

$$f(t) = \sqrt{2-t} = (2-t)^{\frac{1}{2}} = -\left(u(t)\right)^{\frac{1}{2}}\times u'(t) \text{ donc } F(t) = -\frac{2}{3}\left(u(t)\right)^{\frac{3}{2}} = -\frac{2}{3}(2-t)^{\frac{3}{2}}$$

$$I = \left[-\frac{2}{3}(2-t)^{\frac{3}{2}}\right]_0^1 = -\frac{2}{3} - \left(-\frac{2}{3}\times 2^{\frac{3}{2}}\right) = \frac{2}{3}\left(2\sqrt{2}-1\right).$$

g) $\displaystyle\int_0^{\ln 2} \frac{\mathrm{e}^{2t}}{\mathrm{e}^{2t}+1}\mathrm{d}t$: soit $u(t) = \mathrm{e}^{2t}+1$; alors $u'(t) = 2\mathrm{e}^{2t}$.

$$f(t)=\frac{e^{2t}}{e^{2t}+1}=\frac{1}{2}\times\frac{2e^{2t}}{e^{2t}+1}=\frac{1}{2}\times\frac{u'(t)}{u(t)} \text{ donc } F(t)=\frac{1}{2}\ln\left(u(t)\right)=\frac{1}{2}\ln\left(e^{2t}+1\right)$$

$$I=\left[\frac{1}{2}\ln\left(e^{2t}+1\right)\right]_0^{\ln 2}=\frac{1}{2}\left(\ln\left(e^{2\ln 2}+1\right)-\ln\left(e^0+1\right)\right)=\frac{1}{2}\ln\frac{5}{2}.$$

h) $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin(2t)\,dt$: soit $u(t)=2t$; alors $u'(t)=2$.

$$f(t)=\sin(2t)=-\frac{1}{2}\times(-\sin(2t))\times 2=-\frac{1}{2}\times(\cos)'(u(t))\times u'(t)$$

donc $F(t)=-\frac{1}{2}\cos\left(u(t)\right)=-\frac{1}{2}\cos(2t)$

$$I=\left[-\frac{1}{2}\cos(2t)\right]_0^{\frac{\pi}{2}}=-\frac{1}{2}\cos\pi-\left(-\frac{1}{2}\cos 0\right)=1.$$

i) $\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{4}}\cos(3x)\,dx$: soit $u(x)=3x$; alors $u'(x)=3$.

$$f(x)=\cos(3x)=\frac{1}{3}\times\cos(3x)\times 3=\frac{1}{3}\times(\sin)'(u(x))\times u'(x)$$

donc $F(x)=\frac{1}{3}\sin\left(u(x)\right)=\frac{1}{3}\sin(3x)$

$$I=\left[\frac{1}{3}\sin(3x)\right]_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{4}}=\frac{1}{3}\left(\sin\frac{9\pi}{4}-\sin\frac{3\pi}{2}\right)=\frac{1}{3}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}-(-1)\right)=\frac{\sqrt{2}+2}{6}.$$

<u>Exercice 9</u> : *f* est la fonction définie sur $\left]-\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right[$ par : $f(x)=\frac{8x^2-4}{4x^2-1}$.

1. $\forall x\in\left]-\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right[$, $f(x)=a+\frac{b}{2x+1}+\frac{c}{2x-1}$

$\Leftrightarrow \forall x\in\left]-\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right[$, $f(x)=\frac{a\left(4x^2-1\right)+b\left(2x-1\right)+c\left(2x+1\right)}{(2x+1)(2x-1)}$

$\Leftrightarrow \forall x\in\left]-\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right[$, $\frac{8x^2-4}{4x^2-1}=\frac{4ax^2+\left(2b+2c\right)x-a-b+c}{(2x+1)(2x-1)}$

$\Leftrightarrow \forall x\in\left]-\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right[$, $8x^2-4=4ax^2+\left(2b+2c\right)x-a-b+c$

Deux polynômes sont égaux si et seulement si ils ont le même degré et les mêmes coefficients.

L'égalité précédente équivaut à : $\begin{cases}4a=8\\2b+2c=0\\-a-b+c=-4\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=2\\c=-b\\-2-2b=-4\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=2\\b=1\\c=-1\end{cases}$

D'où : $\forall x\in\left]-\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right[$, $f(x)=2+\frac{1}{2x+1}-\frac{1}{2x-1}$.

2. $f(x)=2+\frac{1}{2}\times\frac{2}{2x+1}-\frac{1}{2}\times\frac{2}{2x-1}$ donc $F(x)=2x+\frac{1}{2}\ln|2x+1|-\frac{1}{2}\ln|2x-1|$.

$$\int_0^{\frac{1}{4}}f(x)\,dx=\left[2x+\frac{1}{2}\ln|2x+1|-\frac{1}{2}\ln|2x-1|\right]_0^{\frac{1}{4}}=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\ln\frac{3}{2}-\frac{1}{2}\ln\frac{1}{2}-\left(\frac{1}{2}\ln 1-\frac{1}{2}\ln 1\right)=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\ln 3.$$

Exercice 10 :

$F(x)=(ax+b)\mathrm{e}^{-x}$

$F'(x)=a\times\mathrm{e}^{-x}+(ax+b)\times(-\mathrm{e}^{-x})=(a-ax-b)\mathrm{e}^{-x}=(a-b-ax)\mathrm{e}^{-x}$

On identifie avec l'expression de $f(x)=(x-1)\mathrm{e}^{-x}$: $\begin{cases}a-b=-1\\-a=1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=-1\\b=0\end{cases}$

Donc $F(x)=-x\mathrm{e}^{-x}$ et $\int_0^{\ln 3} f(x)\,dx=F(\ln 3)-F(0)=-\ln 3\mathrm{e}^{-\ln 3}=-\ln 3\mathrm{e}^{\ln\frac{1}{3}}=-\frac{\ln 3}{3}$

III. Calcul d'aires *Corrigé*

Exercice 11 :

Le schéma a) correspond à l'intégrale 1.
Le schéma b) correspond à l'intégrale 3.
Le schéma c) correspond à l'intégrale 4.
Le schéma d) correspond à l'intégrale 2.

Exercice 12 :

a) $I_1=-A_1+A_2$, $I_2=-A_3-A_4$ et $I_3=A_5-A_4$.

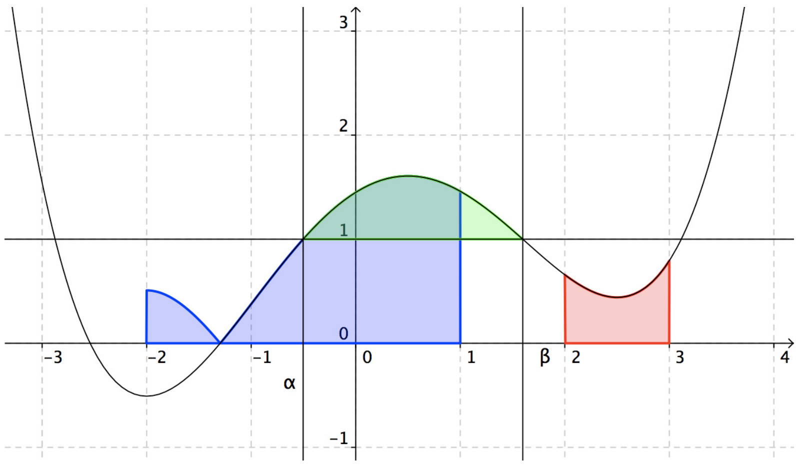
b) $A_1+A_2+A_3=\int_{-6}^{0}|f(x)|\mathrm{d}x=\int_{-5}^{-1,5}f(x)\mathrm{d}x-\int_{-6}^{-5}f(x)\mathrm{d}x-\int_{-1,5}^{0}f(x)\mathrm{d}x$;

Exercice 13 :

a) $I_1=A_1+A_3$; $I_2=A_3+A_4+A_5$; $I_3=A_1+A_2-A_6$; $I_4=A_1+A_2+A_6$.

b) $A_4+A_5=\int_1^2 g(x)\mathrm{d}x+\int_2^3 f(x)\mathrm{d}x$.

Exercice 14 :



a) $\int_2^3 f(x)\mathrm{d}x$ est l'aire de la partie du plan coloriée en rouge.

b) $\int_{-2}^{1}|f(x)|\mathrm{d}x$ est l'aire de la partie du plan coloriée en bleu.

c) $\int_{\alpha}^{\beta}|f(x)-1|\mathrm{d}x$ est l'aire de la partie du plan coloriée en vert.

Exercice 15 :

a) $A_{rouge}=\int_1^2[g(x)-f(x)]\mathrm{d}x=\int_1^2\left[\sqrt{x}-\frac{1}{x}\right]\mathrm{d}x=\int_1^2\sqrt{x}\mathrm{d}x-\int_1^2\frac{1}{x}\mathrm{d}x$.

Sur l'intervalle $[1;2]$, une primitive de la fonction g est $G(x)=\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}$

et une primitive de la fonction f est $F(x)=\ln x$.

Donc l'aire est égale à $A_{rouge}=\left[\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}\right]_1^2-[\ln x]_1^2=\frac{2}{3}2^{\frac{3}{2}}-\frac{2}{3}-(\ln 2-\ln 1)=\frac{4\sqrt{2}-2}{3}-\ln 2$.

b) $A_{bleue}=\int_2^4\left(\sqrt{x}-\frac{3}{4}x+1\right)\mathrm{d}x=\int_2^4\sqrt{x}\mathrm{d}x-\int_2^4\left(\frac{3}{4}x-1\right)\mathrm{d}x$.

Sur l'intervalle $[1;2]$, une primitive de la fonction h est $H(x)=\frac{3}{8}x^2-x$.

Donc $A_{bleue}=\left[\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}\right]_2^4-\left[\frac{3}{8}x^2-x\right]_2^4=\frac{2}{3}\times 8-\frac{2}{3}\sqrt{8}-\left(\frac{3}{8}\times 16-4-\frac{3}{8}\times 4+2\right)=\frac{17-8\sqrt{2}}{6}$.

c) L'aire de la partie coloriée est $A_{rouge}+A_{bleue}=\frac{13}{6}-\ln 2$ unités d'aire.

<u>Exercice 16</u> :

1. a) $V=\int_{-2}^0 f(x)\mathrm{d}x$.

Une primitive de la fonction f est $F(x)=\frac{1}{9}x^3-\frac{1}{2}x^2$.

Donc $\int_{-2}^0 f(x)\mathrm{d}x=[F(x)]_{-2}^0=F(0)-F(-2)=\frac{8}{9}+\frac{4}{2}=\frac{8}{9}+2=\frac{26}{9}$.

L'aire verte V est égale à $V=\frac{26}{9}$ u.a.

b) $B=\int_0^5|f(x)|\mathrm{d}x=\int_0^3-f(x)\mathrm{d}x+\int_3^5 f(x)\mathrm{d}x$.

Une primitive de la fonction f est $F(x)=\frac{1}{9}x^3-\frac{1}{2}x^2$.

Donc $\int_0^3-f(x)\mathrm{d}x=[-F(x)]_0^3=-F(3)+F(0)=-\frac{27}{9}+\frac{9}{2}=\frac{3}{2}$.

et $\int_3^5 f(x)\mathrm{d}x=[F(x)]_3^5=F(5)-F(3)=\frac{125}{9}-\frac{25}{2}-\frac{27}{9}+\frac{9}{2}=\frac{26}{9}$.

Donc l'aire bleue est égale à $B=\frac{3}{2}+\frac{26}{9}=\frac{79}{18}$ u.a.

2. $A(m)=\int_{-0,5}^m g(x)\mathrm{d}x$. La fonction g est de la forme $g(x)=\frac{u'(x)}{u^2(x)}$ où $u(x)=x^2+1$.

La fonction $G(x)=\frac{-1}{x^3+1}$ est une primitive de la fonction g.

$A(m)=\int_{-0,5}^m g(x)\mathrm{d}x=[G(x)]_{-0,5}^m=G(m)-G(-0,5)=\frac{-1}{m^3+1}+\frac{1}{0,125+1}=\frac{8}{9}-\frac{1}{m^3+1}$.

$A(m)=\frac{8}{9}-\frac{1}{m^3+1}$ unités d'aire.

$\lim\limits_{m\to+\infty}(m^3+1)=+\infty$ donc $\lim\limits_{m\to+\infty}A(m)=\frac{8}{9}$ u.a.

<u>Exercice 17</u> :

Il faut déterminer les bornes. On résout $f(x)=0$. Les solutions sont $\{-\sqrt{2};-1;1;\sqrt{2}\}$.

L'aire du domaine D est $A=\int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}}|f(x)|\mathrm{d}x=-\int_{-\sqrt{2}}^{-1}f(x)\mathrm{d}x+\int_{-1}^{1}f(x)\mathrm{d}x-\int_{1}^{\sqrt{2}}f(x)\mathrm{d}x$ unités d'aire.

Une primitive de la fonction f est $F(x)=\frac{1}{5}x^5-x^3+2x$. F est une fonction impaire.

$$A=-[F(x)]_{-\sqrt{2}}^{-1}+[F(x)]_{-1}^{1}-[F(x)]_{1}^{\sqrt{2}}$$

$$A=-F(-1)+F\left(-\sqrt{2}\right)+F(1)-F(-1)-F\left(\sqrt{2}\right)+F(1)=4F(1)-2F\left(\sqrt{2}\right)$$

$$A=4\left(\frac{1}{5}-1+2\right)-2\left(\frac{\sqrt{2}^5}{5}-\sqrt{2}^3+2\sqrt{2}\right)=\frac{24-8\sqrt{2}}{5}\ ;$$

l'unité d'aire est de 2 cm² donc l'aire du domaine D est $\frac{48-16\sqrt{2}}{5}\approx 5{,}07$ cm².

IV. Intégrales et inégalités *Corrigé*

Exercice 18 : $I=\displaystyle\int_0^1\frac{\mathrm{e}^{-t^2}}{1+t}\mathrm{d}t$.

Soit f la fonction définie sur [0 ; 1] par $f(t)=\frac{\mathrm{e}^{-t^2}}{1+t}$.

Pour tout t de [0 ; 1], $f(t)\ ?\ 0$, donc $\displaystyle\int_0^1\frac{\mathrm{e}^{-t^2}}{1+t}\mathrm{d}t\ ?\ 0$, c'est à dire $I\ ?\ 0$.

Exercice 19 : f est la fonction définie sur $[0;1]$ par $f(x)=\frac{x^2}{1+x}$. On note $I=\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x$.

a) Pour tout réel t de l'intervalle [0 ; 1], on a successivement :

$0;\ t;\ 1$ puis $1;\ 1+t;\ 2$ et $\frac{1}{2};\ \frac{1}{1+t};\ 1$;

donc pour tout réel t de l'intervalle [0 ; 1], on a : $0;\ \frac{1}{1+t};\ 1$, puis, en multipliant par t^2, qui est positif, on obtient : $0;\ \frac{t^2}{1+t};\ t^2$, c'est-à-dire $0;\ f(t);\ t^2$.

b) Puisque pour tout réel t de l'intervalle [0 ; 1], $0;\ f(t);\ t^2$, on en déduit que

$$0;\ \int_0^1 f(t)\mathrm{d}t;\ \int_0^1 t^2\mathrm{d}t.$$

Or, $\int_0^1 t^2\mathrm{d}t=\left[\frac{1}{3}t^3\right]_0^1=\frac{1}{3}$; d'où : $0;\ I;\ \frac{1}{3}$.

Exercice 20 :

a) Soit t un réel strictement positif : alors $0<t^2;\ 1+t^2$, puis $\frac{1}{1+t^2};\ \frac{1}{t^2}$.

b) On en déduit que si n est un entier naturel non nul, alors pour tout réel t de l'intervalle [1 ; n], $\frac{1}{1+t^2};\ \frac{1}{t^2}$, puis que $\displaystyle\int_1^n\frac{1}{1+t^2}\mathrm{d}t;\ \int_1^n\frac{1}{t^2}\mathrm{d}t$.

Or, $\displaystyle\int_1^n\frac{1}{t^2}\mathrm{d}t=\left[-\frac{1}{t}\right]_1^n=-\frac{1}{n}-\left(-\frac{1}{1}\right)=1-\frac{1}{n}$; on a donc : $\displaystyle\int_1^n\frac{1}{1+t^2}\mathrm{d}t;\ 1-\frac{1}{n}$.

Exercice 21 :

1. $I = \int_0^1 x^2 \ln(x+1)\mathrm{d}x$.

Pour tout réel x de l'intervalle [0 ; 1], $1 ;\ x+1 ;\ 2$, puis $0 ;\ \ln(x+1) ;\ \ln 2$ et $x^2\ ?\ 0$,

donc $0 ;\ x^2\ln(x+1) ;\ x^2 \ln 2$. On en déduit que $0 ;\ \int_0^1 x^2\ln(x+1)\mathrm{d}x ;\ \ln 2\int_0^1 x^2\mathrm{d}x$.

Or, $\int_0^1 x^2\mathrm{d}x = \left[\frac{1}{3}x^3\right]_0^1 = \frac{1}{3}$. D'où : $0 ;\ I ;\ \frac{\ln 2}{3}$.

2. $I = \int_0^1 (1-x)\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x$.

Pour tout réel x de l'intervalle [0 ; 1], $0 ;\ 1-x ;\ 1$ et $\mathrm{e}^{-x}\ ?\ 0$, donc $0 ;\ (1-x)\mathrm{e}^{-x} ;\ \mathrm{e}^{-x}$.

On en déduit que $0 ;\ \int_0^1 (1-x)\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x ;\ \int_0^1 \mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x$.

Or, $\int_0^1 \mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x = \left[-\mathrm{e}^{-x}\right]_0^1 = -\mathrm{e}^{-1} - (-1) = 1 - \frac{1}{\mathrm{e}}$. D'où : $0 ;\ I ;\ 1 - \frac{1}{\mathrm{e}}$.

Exercice 22 : F est la fonction définie sur $[0 ; +\infty[$ par $F(x) = \int_0^x \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{1+t^3}}$.

Soit f la fonction définie sur $[0 ; +\infty[$ par $f(t) = \frac{1}{\sqrt{1+t^3}}$.

Pour tout réel positif t, on a successivement : $t^3\ ?\ 0$; $1+t^3\ ?\ 1$; $\sqrt{1+t^3}\ ?\ 1$, puis $\frac{1}{\sqrt{1+t^3}} ;\ 1$.

On en déduit que $\int_0^x \frac{1}{\sqrt{1+t^3}}\mathrm{d}t ;\ \int_0^x 1\cdot\mathrm{d}t$.

Or, $\int_0^x 1\cdot\mathrm{d}t = [t]_0^x = x$. Donc, pour tout réel x positif, $F(x) ;\ x$.

Exercice 23 : On connaît le tableau de variation d'une fonction f définie sur $[0;5]$:

x	0	2	3	5
f	-1 ↗	2 ↘	1 ↗	2

D'après le tableau de variation, pour tout x de l'intervalle [0 ; 2], $-1 ;\ f(x) ;\ 2$, donc $\int_0^2 -1\mathrm{d}x ;\ \int_0^2 f(x)\mathrm{d}x ;\ \int_0^2 2\mathrm{d}x$, puis $-2 ;\ I ;\ 4$.

De même, pour tout x de [2 ; 5], $1 ;\ f(x) ;\ 2$, donc $\int_2^5 1\mathrm{d}x ;\ \int_2^5 f(x)\mathrm{d}x ;\ \int_2^5 2\mathrm{d}x$, puis $3 ;\ J ;\ 6$.

V. Suites et intégrales *Corrigé*

Exercice 24 : La suite (u_n) est définie pour tout entier naturel n, par $u_n = \int_0^1 x^n\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x$

a) Pour tout entier n, on a : pour tout x de $[0;1]$, $x^n\ ?\ 0$ et $\mathrm{e}^{-x} > 0$ donc $x^n\mathrm{e}^{-x}\ ?\ 0$;

donc pour tout entier naturel n : $\int_0^1 x^n\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x\ ?\ 0$ soit $u_n\ ?\ 0$.

b) Pour tout entier naturel n ,

$u_{n+1} - u_n = \int_0^1 x^{n+1}\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x - \int_0^1 x^n\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x = \int_0^1 \left(x^{n+1} - x^n\right)\ \mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x = \int_0^1 x^n\left(x-1\right)\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x$;

or sur $[0;1]$, pour tout entier naturel n , $x^n\ ?\ 0$, $\mathrm{e}^{-x} > 0$ et $x-1 ;\ 0$

donc sur $[0;1]$, $x^n(x-1)\mathrm{e}^{-x}$; 0 et donc $\int_0^1 x^n(x-1)\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x$; 0 soit $u_{n+1}-u_n$; 0.

u_{n+1} ; u_n donc la suite (u_n) est décroissante .

c) La suite (u_n) est décroissante et minorée par 0 donc elle converge vers un réel l.

Exercice 25 : Pour tout n de **N**, on définit $x_n=\int_0^1 t^n\cos t\mathrm{d}t$.

a) Pour tout entier naturel n et pour tout x de $[0;1]$, t^n ? 0 et $\cos t$? 0 donc $t^n\cos t$? 0.

Sur $[0;1]$, $t^n\cos t$? 0, donc $\int_0^1 t^n\cos t\mathrm{d}t$? 0 soit x_n ? 0.

b) Pour tout entier naturel n , $x_{n+1}-x_n=\int_0^1 t^{n+1}\cos t\mathrm{d}t-\int_0^1 t^n\cos t\mathrm{d}t=\int_0^1 t^n(t-1)\cos t\mathrm{d}t$;

Or sur $[0;1]$, pour tout entier naturel n, t^n ? 0 , $\cos t$? 0 et $t-1$; 0

donc sur $[0;1]$, $t^n(t-1)\cos t$; 0 et donc $\int_0^1 t^n(t-1)\cos t\mathrm{d}t$; 0.

On en déduit $x_{n+1}-x_n$; 0 soit x_{n+1} ; x_n. La suite (x_n) est décroissante.

c) La suite (x_n) est décroissante et minorée par 0 donc elle converge vers un réel l.

Exercice 26 : Pour tout n de **N**, on définit $y_n=\int_0^1 t^n\sin t\mathrm{d}t$.

a) Pour tout t de $[0;1]$, 0 ; $\sin t$; 1 et pour tout n de **N**, t^n ? 0 donc 0 ; $t^n\sin t$; t^n.

Sur $[0;1]$, 0 ; $t^n\sin t$; t^n donc 0 ; $\int_0^1 t^n\sin t\mathrm{d}t$; $\int_0^1 t^n\mathrm{d}t$.

Or $\int_0^1 t^n\mathrm{d}t=\left[\frac{t^{n+1}}{n+1}\right]_0^1=\frac{1}{n+1}$ d'ou 0 ; y_n ; $\frac{1}{n+1}$.

b) $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{n+1}=0$ donc par encadrement $\lim\limits_{x\to+\infty}y_n=0$.

Exercice 27 : Pour tout entier naturel n non nul, on pose $I_n=\int_1^{\mathrm{e}}(\ln x)^n\,\mathrm{d}x$.

a) Pour tout x de $]1;\mathrm{e}[$ et pour tout entier n non nul, $(\ln x)^n-(\ln x)^{n+1}=(\ln x)^n(1-\ln x)$.

Sur $]1;\mathrm{e}[$, $\ln x>0$ et $\ln x<1$ donc pour tout entier n, $(\ln x)^n>0$ et $1-\ln x>0$

donc pour tout entier naturel n : $(\ln x)^n(1-\ln x)>0$ soit $(\ln x)^n-(\ln x)^{n+1}>0$.

b) Pour tout entier naturel n, $I_n-I_{n+1}=\int_1^{\mathrm{e}}(\ln x)^n\,\mathrm{d}x-\int_1^{\mathrm{e}}(\ln x)^{n+1}\,\mathrm{d}x=\int_1^{\mathrm{e}}(\ln x)^n(1-\ln x)\mathrm{d}x$.

Or sur $]1;\mathrm{e}[$, $(\ln x)^n-(\ln x)^{n+1}>0$ donc $\int_1^{\mathrm{e}}(\ln x)^n(1-\ln x)\mathrm{d}x>0$ soit $I_n-I_{n+1}>0$.

Pour tout entier naturel n, $I_n>I_{n+1}$ donc la suite (I_n) est décroissante .

Exercice 28 : Pour tout entier naturel n non nul, on pose $I_n=\int_1^n \mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t$.

Pour tout entier naturel n, $I_{n+1}-I_n=\int_1^{n+1}\mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t-\int_1^n\mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t=\int_1^{n+1}\mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t+\int_n^1\mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t=\int_n^{n+1}\mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t$.

Or pour tout entier naturel n , sur $[n;n+1]$, $\mathrm{e}^{-t}>0$ donc $\int_n^{n+1}\mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t>0$.

Donc $I_{n+1}-I_n>0$ soit $I_{n+1}>I_n$ et la suite (I_n) est croissante.

Exercice 29 : $I_n=\int_1^{\mathrm{e}}(\ln x)^n\,\mathrm{d}x$.

Posons $u(x)=(\ln x)^{n+1}$ et $v'(x)=1$. On a alors $u'(x)=(n+1)(\ln x)^{n}\times\dfrac{1}{x}$ et $v(x)=x$.

D'où en utilisant la formule d'intégration par parties :

$$I_{n+1}=\int_1^{\mathrm{e}}(\ln x)^{n+1}\,\mathrm{d}x=\left[(\ln x)^{n+1}\times x\right]_1^{\mathrm{e}}-\int_1^{\mathrm{e}}(n+1)(\ln x)^{n}\times\frac{1}{x}\times x\mathrm{d}x\ ;$$

$$I_{n+1}=\mathrm{e}\times(\ln \mathrm{e})^{n+1}-1\times(\ln 1)^{n+1}-(n+1)\int_1^{\mathrm{e}}(\ln x)^{n}\,\mathrm{d}x\ ;\ I_{n+1}=\mathrm{e}-(n+1)I_n.$$

V. Intégrales et algorithmes *Corrigé*

Exercice 30 :

Voici ce qui se passe quand $n=4$:

i	0	$0.75\times\ln(2)$	$0.75\times[\ln(2)+\ln(2.75)]$	$0.75\times[\ln(2)+\ln(2.75)+\ln(3)]$	$0.75\times[\ln(2)+\ln(2.75)+\ln(3)+\ln(4.25)]$
x	2	2.75	3.5	4.25	5
s	0	$0.75\times\ln(2.75)$	$0.75\times[\ln(2.75)+\ln(3.5)]$	$0.75\times[\ln(2.75)+\ln(3.5)+\ln(4.25)]$	$0.75\times[\ln(2.75)+\ln(3.5)+\ln(4.25)+\ln(5)]$
k	0	1	2	3	4

On a encadré ainsi l'intégrale par la méthode « des rectangles », $i\leq\int_2^5\ln x\,dx\leq s$.

En prenant une valeur de n de plus en plus petite, on obtient deux suites (i_n) et (s_n) qui converge vers la valeur de l'intégrale.

Exercice 31 :

1) La fonction f définie par $f(x)=\mathrm{e}^{-x^2}$ est positive et comme sa dérivée $f'(x)=-2x\mathrm{e}^{-x^2}$ est négative sur l'intervalle $[0{,}1]$, la fonction f est aussi décroissante sur l'intervalle $[0{,}1]$.
2) Algorithme donnant en sortie les valeurs de U (somme de n rectangles « inférieurs ») et V (somme de n rectangles « inférieurs ») encadrant $\int_0^1 f(x)\,dx$.

Entrée : Saisir n

Initialisation : x prend la valeur 0

U prend la valeur 0

V prend la valeur 0

Traitement : Pour k allant de 0 à $n-1$

U prend la valeur $U+\dfrac{1}{n}\mathrm{e}^{-x^2}$

x prend la valeur $x+\dfrac{1}{n}$

V prend la valeur $V+\dfrac{1}{n}\mathrm{e}^{-x^2}$

Fin du pour

Afficher U, V

La fonction f est décroissante

La première somme V est donc la somme sup

La deuxième somme U est donc la somme inf

V. Intégration par parties *Corrigé*

Exercice 32 :

a) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\sin x\mathrm{d}x$;

$$\left.\begin{array}{l}\text{Posons : } u(x)=x \text{ et } v'(x)=\sin x\\ \text{on a : } u'(x)=1 \text{ et } v(x)=-\cos x\end{array}\right\} \text{ les fonctions } u,v,u' \text{ et } v' \text{ sont continues sur } \left[0;\frac{\pi}{2}\right] \text{ ;}$$

Appliquons la formule d'intégration par parties :

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\sin x\mathrm{d}x=[-x\cos x]_0^{\frac{\pi}{2}}-\int_0^{\frac{\pi}{2}}(-\cos x)\,\mathrm{d}x$$

$$=\left(-\frac{\pi}{2}\cos\frac{\pi}{2}\right)-(-0\cos 0)+[\sin x]_0^{\frac{\pi}{2}}=\sin\frac{\pi}{2}-\sin 0=1.$$

b) $\int_0^2 (2-x)\mathrm{e}^x\mathrm{d}x$;

$$\left.\begin{array}{l}\text{Posons : } u(x)=2-x \text{ et } v'(x)=\mathrm{e}^x\\ \text{on a : } u'(x)=-1 \text{ et } v(x)=\mathrm{e}^x\end{array}\right\} \text{ les fonctions } u,v,u' \text{ et } v' \text{ sont continues sur } [0;2] \text{ ;}$$

Appliquons la formule d'intégration par parties :

$$\int_0^2 (2-x)\mathrm{e}^x\mathrm{d}x=\left[(2-x)\mathrm{e}^x\right]_0^2-\int_0^2\left(-\mathrm{e}^x\right)\mathrm{d}x=-2\mathrm{e}^0+\left[\mathrm{e}^x\right]_0^2=-2+\mathrm{e}^2-\mathrm{e}^0=\mathrm{e}^2-3.$$

c) $\int_1^{\mathrm{e}} \ln(x)\mathrm{d}x$;

$$\left.\begin{array}{l}\text{Posons : } u(x)=\ln x \text{ et } v'(x)=1\\ \text{on a : } u'(x)=\dfrac{1}{x} \text{ et } v(x)=x\end{array}\right\} \text{ les fonctions } u,v,u' \text{ et } v' \text{ sont continues sur } [1;\mathrm{e}] \text{ ;}$$

Appliquons la formule d'intégration par parties :

$$\int_1^{\mathrm{e}} \ln(x)\mathrm{d}x=[x\ln(x)]_1^{\mathrm{e}}-\int_1^{\mathrm{e}}\frac{1}{x}x\mathrm{d}x=\mathrm{e}\ln(\mathrm{e})-1\ln(1)-\int_1^{\mathrm{e}}1\mathrm{d}x=\mathrm{e}-[x]_1^{\mathrm{e}}=\mathrm{e}-(\mathrm{e}-1)=1.$$

<u>Exercice 33</u> : $f(x)=x^2\ln(x)$ pour $x\in\left]0;+\infty\right[$.

$$\left.\begin{array}{l}\text{Posons : } u(x)=\ln x \text{ et } v'(x)=x^2\\ \text{on a : } u'(x)=\dfrac{1}{x} \text{ et } v(x)=\dfrac{x^3}{3}\end{array}\right\} \text{ les fonctions } u,v,u' \text{ et } v' \text{ sont continues sur } \left]0;+\infty\right[\text{ ;}$$

Appliquons la formule d'intégration par parties :

$$\int x^2\ln(x)\mathrm{d}x=\left[\frac{x^3}{3}\ln(x)\right]-\int\frac{x^2}{3}\mathrm{d}x=\frac{x^3}{3}\ln(x)-\left[\frac{1}{3}\times\frac{x^3}{3}\right].$$

Une primitive sur $\left]0;+\infty\right[$ de *f* est la fonction *F* définie sur $\left]0;+\infty\right[$ par $F(x)=\dfrac{x^3}{3}\ln(x)-\dfrac{x^3}{3}$.

<u>Exercice 34</u> : $I=\int_0^{\pi}\mathrm{e}^x\sin(x)\mathrm{d}x$ et $J=\int_0^{\pi}\mathrm{e}^x\cos(x)\mathrm{d}x$.

a) En appliquant à *J* la formule d'intégration par parties $\int uv'=[uv]-\int u'v$ avec $u(x)=\cos x$ et $v'(x)=\mathrm{e}^x$, les fonctions *u*, *v*, *u'* et *v'* étant continues sur $[0;\pi]$, on obtient :
$J=\left[(\cos x)\mathrm{e}^x\right]_0^{\pi}-\int_0^{\pi}(-\sin x)\mathrm{e}^x\mathrm{d}x=-\mathrm{e}^{\pi}-1+I$, donc $I=J+\mathrm{e}^{\pi}+1$.

b) Pour déterminer *I* et *J*, on résout le système (*S*) : $\begin{cases}I=-J\\ I=J+\mathrm{e}^{\pi}+1\end{cases}$;

$$(S) \Leftrightarrow \begin{cases} J = -I \\ I = -I + e^{\pi} + 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} J = -I \\ 2I = e^{\pi} + 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} I = \dfrac{e^{\pi} + 1}{2} \\ J = -\dfrac{e^{\pi} + 1}{2} \end{cases}.$$

<u>Exercice 33</u> : $I_n = \int_0^1 x^n e^{1-x} dx$ pour n entier naturel.

a) $I_1 = \int_0^1 x e^{1-x} dx = \left[-x e^{1-x}\right]_0^1 - \int_0^1 \left(-e^{1-x}\right) dx = -1 + \left[-e^{1-x}\right]_0^1 = -1 - 1 + e = e - 2$.

b) $I_{n+1} = \int_0^1 x^{n+1} e^{1-x} dx = \left[-x^{n+1} e^{1-x}\right]_0^1 - \int_0^1 (n+1) x^n \left(-e^{1-x}\right) dx = -1 + (n+1) \int_0^1 x^n e^{1-x} dx$

donc $I_{n+1} = (n+1) I_n - 1$.

c) On calcule d'abord I_2 : $I_2 = 3I_1 - 1 = 3e - 7$; on en déduit I_3 : $I_3 = 4I_2 - 1 = 12e - 29$.

<u>Exercice 34</u> :

a) $I = \int_0^3 x^2 e^{-2x} dx$;

En appliquant la formule d'intégration par parties $\int uv' = [uv] - \int u'v$ avec $u(x) = x^2$ et $v'(x) = e^{-2x}$, les fonctions *u*, *v*, *u'* et *v'* étant continues sur $[0;3]$, on obtient :

$$I = \left[x^2\left(-\frac{1}{2}e^{-2x}\right)\right]_0^3 - \int_0^3 2x\left(-\frac{1}{2}e^{-2x}\right)dx = -\frac{9}{2}e^{-6} + \int_0^3 x e^{-2x} dx.$$

Intégrons de nouveau par parties $\int_0^3 x e^{-2x} dx$ avec $u(x) = x$ et $v'(x) = e^{-2x}$.

$$\int_0^3 x e^{-2x} dx = \left[-\frac{1}{2} x e^{-2x}\right]_0^3 - \int_0^3 \left(-\frac{1}{2} e^{-2x}\right) dx = -\frac{3}{2}e^{-6} + \left[-\frac{1}{4}e^{-2x}\right]_0^3 = -\frac{7}{4}e^{-6} + \frac{1}{4}.$$

On en déduit : $I = -\frac{9}{2}e^{-6} - \frac{7}{4}e^{-6} + \frac{1}{4} = -\frac{25}{4}e^{-6} + \frac{1}{4}$.

b) $I = \int_0^{\pi} x^2 \cos(x) dx$;

En appliquant la formule d'intégration par parties $\int uv' = [uv] - \int u'v$ avec $u(x) = x^2$ et $v'(x) = \cos x$, les fonctions *u*, *v*, *u'* et *v'* étant continues sur $[0;\pi]$, on obtient :

$I = \left[x^2 \sin x\right]_0^{\pi} - \int_0^{\pi} 2x \sin x \, dx = -2\int_0^{\pi} x \sin x \, dx$.

Intégrons de nouveau par parties $\int_0^{\pi} x \sin x \, dx$ avec $u(x) = x$ et $v'(x) = \sin x$.

$\int_0^{\pi} x \sin x \, dx = [x \cos x]_0^{\pi} - \int_0^{\pi} (-\cos x) dx = 1 + [\sin x]_0^{\pi} = 1$.

On en déduit : $I = -2 \times 1 = -2$.