INTÉGRATION

I. Détermination de primitives

Exercice 1 : Vérifier que F est une primitive de f sur $\mathbf{R}$ avec :

1. $f(x)=\dfrac{1}{1+\mathrm{e}^x}$ $\qquad F(x)=x-\ln\left(1+\mathrm{e}^x\right)$.
2. $f(x)=\sqrt{\mathrm{e}^x}$ $\qquad F(x)=2\sqrt{\mathrm{e}^x}$.

Exercice 2 : *Primitives de sommes de fonctions usuelles*

Déterminer une primitive de chacune des fonctions suivantes :

$f_1(x)=4x^3+3x^2+2x+1$ sur $I=\mathbf{R}$ $\qquad f_2(x)=6x^5+4x^3-1$ sur $I=\mathbf{R}$

$f_3(x)=x^3+x^2+x+1$ sur $I=\mathbf{R}$ $\qquad f_4(x)=4x^7-x^6-\dfrac{2}{3}x-5$ sur $I=\mathbf{R}$

$f_5(x)=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}+9$ sur $I=]0;+\infty[$ $\qquad f_6(x)=\sin x-3\cos x$ sur $I=\mathbf{R}$

$f_7(x)=\dfrac{2}{x}$ sur $I=\mathbf{R}^*$ $\qquad f_8(x)=-\dfrac{1}{x^2}+\dfrac{1}{x}-\mathrm{e}^x$ sur $I=\mathbf{R}^*$

Exercice 3 : *Primitives de* $\dfrac{u'}{u}$, $\dfrac{u'}{u^2}$ et $u'\mathrm{e}^u$

Déterminer une primitive de chacune des fonctions suivantes :

$f_1(x)=\dfrac{2x}{x^2+1}$ sur $I=\mathbf{R}$ $\qquad f_2(x)=\dfrac{4x^3}{\left(x^4+1\right)^2}$ sur $I=\mathbf{R}$

$f_3(x)=3x\,\mathrm{e}^{3x^2+1}$ sur $I=\mathbf{R}$ $\qquad f_4(x)=\dfrac{\mathrm{e}^x}{\left(\mathrm{e}^x+1\right)^2}$ sur $I=\mathbf{R}$

$f_5(x)=\dfrac{\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^x+3}$ sur $I=\mathbf{R}$ $\qquad f_6(x)=\cos x\,\mathrm{e}^{\sin x}$ sur $I=\mathbf{R}$

Exercice 4 :

Déterminer toutes les primitives sur $\mathbf{R}$ de la fonction f, définie sur $\mathbf{R}$ par $f(x)=\dfrac{x}{x^2+4}$.

Exercice 5 :

1. Déterminer la primitive sur $\mathbf{R}$ de la fonction cosinus qui s'annule en $\dfrac{\pi}{2}$.
2. Déterminer la primitive de la fonction f, définie sur $\mathbf{R}$ par $f(x)=\mathrm{e}^{3x+1}$, qui s'annule en $x=-1$.
3. Déterminer la primitive de la fonction f, définie sur $\mathbf{R}$ par $f(x)=x\mathrm{e}^{-x^2}$, dont la courbe représentative passe par le point $A\left(\sqrt{\ln 2},1\right)$.

Exercice 6 : On considère la fonction f définie sur $]2;+\infty[$ par $f(x)=\dfrac{2x^2-3x-4}{x-2}$.

a) Écrire f sous la forme $f(x)=ax+b+\dfrac{c}{x-2}$.

b) Déterminer alors une primitive de f.

II. Calcul d'intégrales

À l'aide des primitives

Exercice 7 : Calculer les intégrales suivantes :

a) $\int_{-1}^{1}\left(t^2+4t+3\right)\mathrm{d}t$ b) $\int_{1}^{2}\left(\frac{1}{2t}-\frac{3}{t^2}\right)\mathrm{d}t$ c) $\int_{\ln 2}^{\ln 3}\mathrm{e}^{x}\mathrm{d}x$

d) $\int_{1}^{2}\sqrt{t}\,\mathrm{d}t$ e) $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}}\left(\cos x-\sin x\right)\mathrm{d}x$ f) $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}\frac{\mathrm{d}x}{\cos^2 x}$

Exercice 8 : Calculer les intégrales suivantes :

a) $\int_{0}^{\ln 3}\mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t$ b) $\int_{0}^{2}\frac{x}{\left(x^2+1\right)^2}\mathrm{d}x$ c) $\int_{0}^{-1}\frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{1-2t}}$

d) $\int_{1}^{2}\frac{\mathrm{d}x}{3x+2}$ e) $\int_{\frac{1}{\mathrm{e}}}^{\mathrm{e}}\frac{\ln t}{t}\mathrm{d}t$ f) $\int_{0}^{1}\sqrt{2-t}\,\mathrm{d}t$

g) $\int_{0}^{\ln 2}\frac{\mathrm{e}^{2t}}{\mathrm{e}^{2t}+1}\mathrm{d}t$ h) $\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\sin\left(2t\right)\mathrm{d}t$ i) $\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{4}}\cos\left(3x\right)\mathrm{d}x$

Exercice 9 : Soit *f* la fonction définie sur $\left]-\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right[$ par : $f(x)=\frac{8x^2-4}{4x^2-1}$.

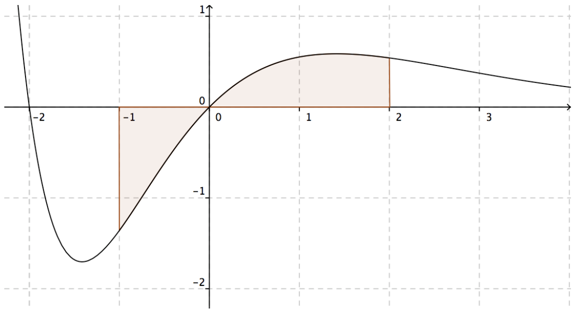
1. Déterminer les réels *a*, *b* et *c* tels que : $\forall x\in\left]-\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right[$, $f(x)=a+\frac{b}{2x+1}+\frac{c}{2x-1}$.

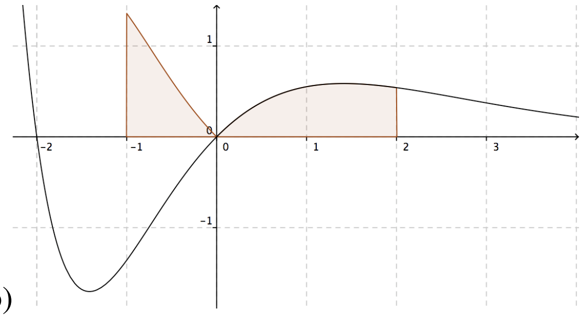
2. Calculer l'intégrale $\int_{0}^{\frac{1}{4}}f(x)\mathrm{d}x$.

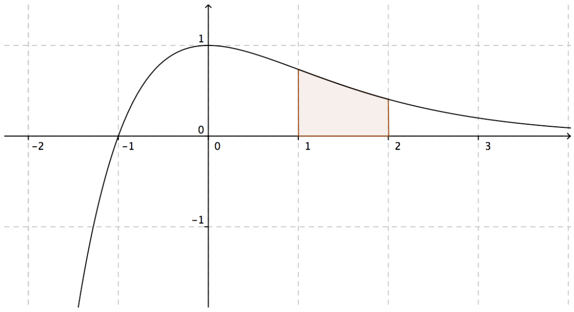
Exercice 10 :
Soient *a* et *b* deux réels.
On considère les fonctions f et F définies sur $\mathbb{R}$ par $f\left(x\right)=\left(x-1\right)\mathrm{e}^{-x}$ et $F\left(x\right)=\left(ax+b\right)\mathrm{e}^{-x}$.
1. Déterminer les réels *a* et *b* tels que *F* soit une primitive de *f*.
2. En déduire $\int_{0}^{\ln(3)}\left(x-1\right)\mathrm{e}^{-x}dx$

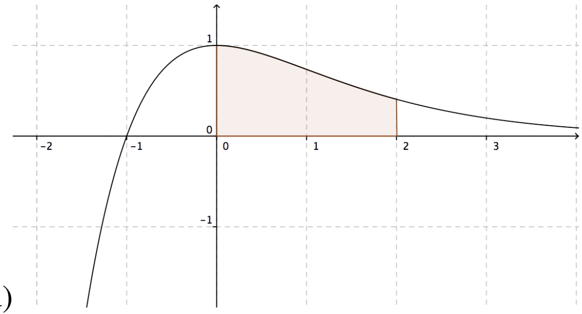
III. Calcul d'aires

Exercice 11 :
Associer chaque intégrale au schéma qui lui correspond (pour cet exercice, les aires des parties du plan situées sous l'axe des abscisses sont comptées négativement).

a) 

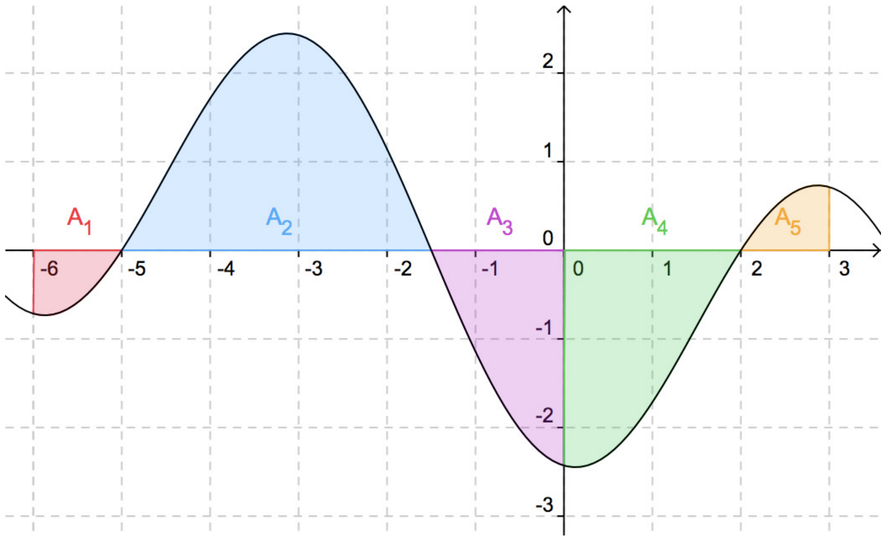
b) 

c) 

d) 

1. $\int_{-1}^{2} f(x)\,\mathrm{d}x$ 2. $\int_{0}^{2} f(x)\,\mathrm{d}x$ 3. $\int_{-1}^{1} |f(x)|\,\mathrm{d}x$ 4. $\int_{1}^{2} f(x)\,\mathrm{d}x$

Exercice 12 :
On a tracé dans le repère ci-dessous la courbe représentative de la fonction f.



On suppose connues les aires A_1, A_2, A_3, A_4 et A_5.

a) Avec ces valeurs, exprimer les intégrales suivantes :
$I_1 = \int_{-6}^{-1,5} f(x)\,\mathrm{d}x$, $I_2 = \int_{-1,5}^{2} f(x)\,\mathrm{d}x$ et $I_3 = \int_{0}^{3} f(x)\,\mathrm{d}x$.

b) À l'aide d'intégrales, exprimer la somme $A_1 + A_2 + A_3$.

<u>Exercice 13</u> :

Les aires A_1, A_2, A_3, A_4, A_5 et A_6 sont connues.

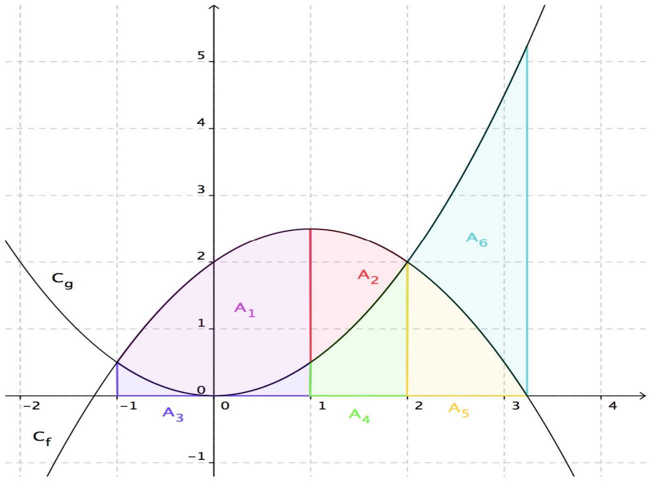
a) Exprimer les intégrales suivantes à l'aide de ces valeurs.

$$I_1 = \int_{-1}^{1} f(x)\,\mathrm{d}x \qquad I_2 = \int_{-1}^{3} g(x)\,\mathrm{d}x$$

$$I_3 = \int_{-1}^{3} \left[f(x) - g(x) \right] \mathrm{d}x$$

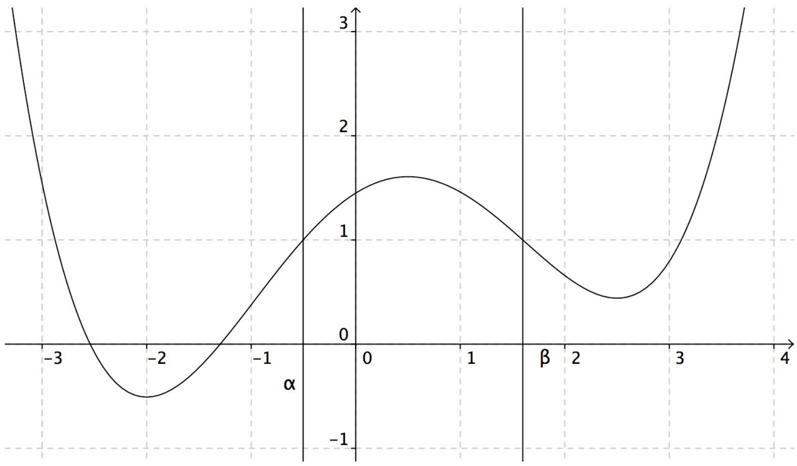
$$I_4 = \int_{-1}^{2} \left| f(x) - g(x) \right| \mathrm{d}x$$

b) Exprimer à l'aide d'intégrales la somme $A_4 + A_5$.



<u>Exercice 14</u> :

On a tracé ci-dessous la courbe représentative d'une fonction *f* et deux droites d'équations respectives $x = \alpha$ et $x = \beta$.



a) Colorier en rouge la partie du plan dont l'aire est donnée par $\int_{2}^{3} f(x)\,\mathrm{d}x$

b) Colorier en bleu la partie du plan dont l'aire est donnée par $\int_{-2}^{1} \left| f(x) \right| \mathrm{d}x$

c) Colorier en vert la partie du plan dont l'aire est donnée par $\int_{\alpha}^{\beta} \left| f(x) - 1 \right| \mathrm{d}x$

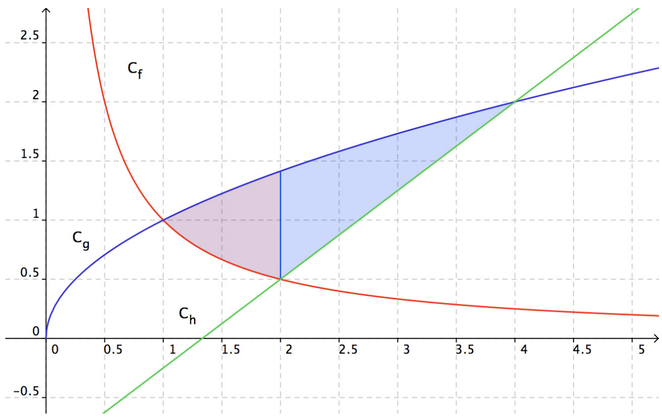
<u>Exercice 15</u> :

On a tracé dans le repère ci-contre les courbes représentatives des fonctions *f*, *g* et *h* définies par : $f(x) = \dfrac{1}{x}$, $g(x) = \sqrt{x}$ et $h(x) = \dfrac{3}{4}x - 1$.

a) Exprimer avec l'aide des intégrales l'aire rouge A_{rouge} et la calculer.

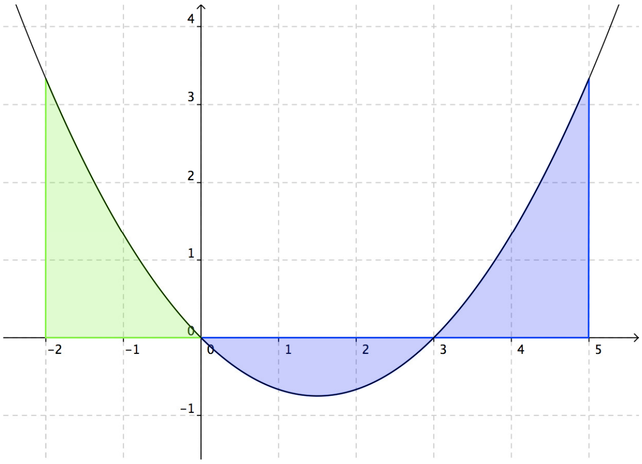
b) Calculer $A_{bleue} = \displaystyle\int_{2}^{4} \left(\sqrt{x} - \frac{3}{4}x + 1 \right) \mathrm{d}x$.

c) En déduire l'aire coloriée sur la figure en unités d'aire.



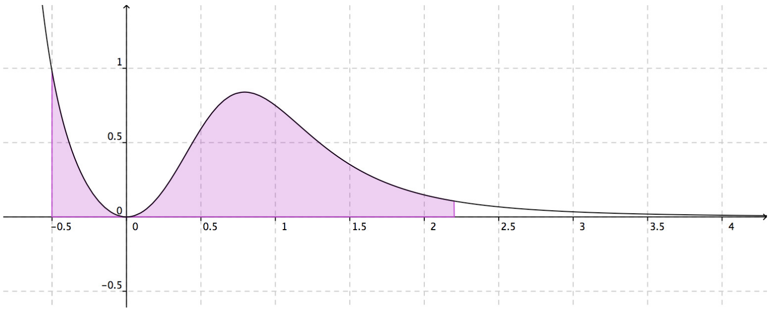
Exercice 16 :

1. On a tracé dans le repère ci-dessous la courbe représentative de la fonction $f(x)=\frac{1}{3}x^2-x$.
   a) Exprimer avec une intégrale l'aire verte *V*. Calculer *V*.
   b) Exprimer avec une intégrale l'aire bleue *B*. Calculer *B*.



2. On a tracé dans le repère ci-dessous la courbe représentative de la fonction $g(x)=\frac{3x^2}{(x^3+1)^2}$.

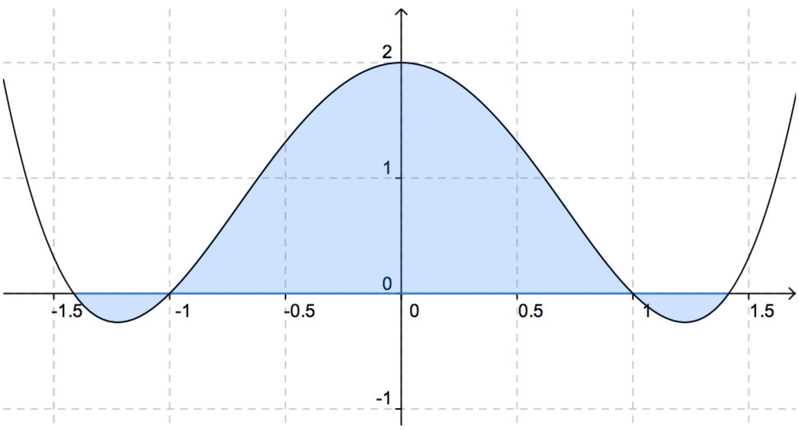
   m désigne un réel strictement positif et $A(m)$ est l'aire de la partie du plan situé entre les droites d'équation $x=-\frac{1}{2}$, $x=m$, l'axe des abscisses et la courbe représentative de la fonction g.
   Cette aire est fonction de m.



   Calculer l'aire $A(m)$ et déterminer la limite de $A(m)$ lorsque *m* tend vers l'infini.

Exercice 17 :

Soit la fonction $f(x)=x^4-3x^2+2$ définie sur $[-2;2]$, représentée ci-dessous dans un repère orthogonal. Les unités graphiques sont 2 cm sur l'axe (Ox) et 1 cm sur l'axe (Oy).
Calculer l'aire, en cm^2, du domaine *D* coloré.



IV. Intégrales et inégalités

Exercice 18 : On pose $I=\int_0^1 \frac{\mathrm{e}^{-t^2}}{1+t}\mathrm{d}t$. Montrer que $I\geq 0$.

Exercice 19 : Soit f la fonction définie sur $[0;1]$ par $f(x)=\frac{x^2}{1+x}$. On note $I=\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x$.

a) Démontrer que pour tout réel t de l'intervalle $[0;1]$, $0\leq f(t)\leq t^2$.

b) En déduire que $0\leq I\leq \frac{1}{3}$.

Exercice 20 :

a) Montrer que, pour tout réel strictement positif t, $\frac{1}{1+t^2}\leq\frac{1}{t^2}$.

b) En déduire que, pour tout entier naturel non nul n, $\int_1^n \frac{1}{1+t^2}\mathrm{d}t\leq 1-\frac{1}{n}$.

Exercice 21 :

1. On pose $I=\int_0^1 x^2\ln(x+1)\mathrm{d}x$. Démontrer que $0\leq I\leq\frac{\ln 2}{3}$.
2. On pose $I=\int_0^1 (1-x)\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x$. Démontrer que $0\leq I\leq 1-\frac{1}{\mathrm{e}}$.

Exercice 22 : Soit F la fonction définie sur $[0\,;+\infty[$ par $F(x)=\int_0^x \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{1+t^3}}$.
Montrer que, pour tout réel x positif, $F(x)\leq x$.

Exercice 23 : On connaît le tableau de variation d'une fonction f définie sur $[0;5]$:

x	0		2		3		5
f	-1	↗	2	↘	1	↗	2

Donner un encadrement de chacune des intégrales suivantes : $I=\int_0^2 f(x)\mathrm{d}x$; $J=\int_2^5 f(x)\mathrm{d}x$.

V. Suites et intégrales

Exercice 24 : Pour tout entier naturel n, on considère la suite (u_n) définie par $u_n = \int_0^1 x^n \mathrm{e}^{-x} \mathrm{d}x$

a) Montrer que pour tout entier naturel n, $u_n \geq 0$.
b) Étudier le sens de variation de la suite (u_n).
c) Que peut-on en déduire pour la suite (u_n) ?

Exercice 25 : Pour tout n de **N**, on définit $x_n = \int_0^1 t^n \cos t \mathrm{d}t$.

a) Montrer que, pour tout n de **N**, la suite (x_n) est à termes positifs.
b) Étudier le sens de variation de la suite (x_n).
c) Que peut-on en déduire pour la suite (x_n) ?

Exercice 26 : Pour tout n de **N**, on définit $y_n = \int_0^1 t^n \sin t \mathrm{d}t$.

a) Montrer que pour tout n de **N**, $0\ ;\ y_n\ ;\ \frac{1}{n+1}$.
b) En déduire la limite de (y_n).

Exercice 27 : Pour tout entier naturel n non nul, on pose $I_n = \int_1^{\mathrm{e}} (\ln x)^n \mathrm{d}x$.

a) Montrer que , pour tout x de $]1;\mathrm{e}[$ et pour tout entier n non nul, $(\ln x)^n - (\ln x)^{n+1} > 0$.
b) En déduire que la suite (I_n) est décroissante.

Exercice 28 : Pour tout entier naturel n non nul, on pose $I_n = \int_1^n \mathrm{e}^{-t} \mathrm{d}t$.
Montrer que la suite (I_n) est croissante.

Exercice 29 : Pour tout entier naturel n non nul, on pose $I_n = \int_1^{\mathrm{e}} (\ln x)^n \mathrm{d}x$.
Montrer, à l'aide d'une intégration par parties, que pour tout entier naturel n non nul :

$$I_{n+1} = \mathrm{e} - (n+1) I_n .$$

VI. Intégration et algorithmes

Exercice 30 :

Soit f la fonction positive et strictement croissante sur $[0,2]$ définie par $f(x)=\ln(x)$.

On souhaite calculer une valeur approchée de $\int_2^5 \ln(x)\,dx$ en utilisant l'algorithme suivant :

Entrée : Saisir n

Initialisation : i prend la valeur 0

s prend la valeur 0

x prend la valeur 2

h prend la valeur $\dfrac{3}{n}$

Traitement : Pour k allant de 0 à $n-1$

| i prend la valeur $i+h\times\ln(x)$

| x prend la valeur $x+h$

| s prend la valeur $s+h\times\ln(x)$

Fin du pour

Afficher i,s

Décrire ce qui se passe étape par étape en prenant $n=4$.

Que représente i et s ?

Exercice 31 :

1) Montrer que la fonction f définie par $f(x)=\mathrm{e}^{-x^2}$ est positive et décroissante sur l'intervalle $[0,1]$.
2) Recopier et compléter l'algorithme donnant en sortie les valeurs de U (somme de n rectangles « inférieurs ») et V (somme de n rectangles « supérieurs ») encadrant $\int_0^1 f(x)\,dx$.

Entrée : Saisir n

Initialisation : x prend la valeur 0

U prend la valeur 0

V prend la valeur 0

Traitement : Pour k allant de 0 à ......

| prend la valeur + ...

| x prend la valeur ....

| prend la valeur + ...

Fin du pour

Afficher U,V

VII. Pour aller plus loin : Intégration par parties (HORS programme)

Théorème

Soit *u* et *v* deux fonctions dérivables sur un intervalle *I*, dont les dérivées *u'* et *v'* sont continues sur *I*.

Pour tous réels *a* et *b* de *I*, $\int_a^b u(x)v'(x)dx = [u(x)v(x)]_a^b - \int_a^b u'(x)v(x)dx$.

Preuve

- u et v sont dérivables sur I donc uv est dérivable sur I, et $(uv)' = u'v + uv'$, donc $uv' = (uv)' - u'v$.
- u, v, u' et v' sont continues sur I, donc uv', $u'v$ et $(uv)'$ le sont aussi alors

$$\begin{aligned}\int_a^b u(x)v'(x)dx &= \int_{ab}^b [(uv)'(x) - u'(x)v(x)]dx \\ &= \int_a^b (uv)'(x)dx - \int_a^b u'(x)v(x)dx \\ &= [uv(x)]_a^b - \int_a^b u'(x)v(x)dx\end{aligned}$$

Exemples

- Calculer $J = \int_0^{\pi} x \sin x \mathrm{d}x$
- Soit x un réel strictement positif. Calculer $\int_1^x \ln t dt$.
- Calculer $J = \int_0^{\pi} xe^x \mathrm{d}x$.
- On note $I = \int_0^{\pi} \mathrm{e}^x \sin x \mathrm{d}x$ et $J = \int_0^{\pi} \mathrm{e}^x \cos x \mathrm{d}x$.
  a. Démontrer que $I = -J$ et que $I = J + 1 + \mathrm{e}^{\pi}$.
  b. En déduire les valeurs exactes de I et de J.

Exercice 32 : À l'aide d'une intégration par parties, calculer les intégrales suivantes :

a) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x \sin x \mathrm{d}x$ b) $\int_0^2 (2-x)\mathrm{e}^x \mathrm{d}x$ c) $\int_1^{\mathrm{e}} \ln(x)\mathrm{d}x$

Exercice 33 :

À l'aide d'une intégration par parties, donner une primitive sur $]0;+\infty[$ de la fonction f définie sur $]0;+\infty[$ par $f(x) = x^2 \ln(x)$.

Exercice 34 : On considère les intégrales $I = \int_0^{\pi} \mathrm{e}^x \sin(x)\mathrm{d}x$ et $J = \int_0^{\pi} \mathrm{e}^x \cos(x)\mathrm{d}x$.

a) En intégrant I puis J par parties, démontrer que $I = -J$ puis que $I = J + \mathrm{e}^{\pi} + 1$.
b) Déterminer I et J par résolution d'un système.

Exercice 35 : Soit n un entier naturel et $I_n = \int_0^1 x^n \mathrm{e}^{1-x} \mathrm{d}x$.

a) Calculer I_1.
b) Établir une relation entre I_{n+1} et I_n.
c) En déduire I_3.

Exercice 36 : À l'aide d'une double intégration par parties, calculer

a) $I=\int_0^3 x^2\mathrm{e}^{-2x}\mathrm{d}x$ b) $I=\int_0^{\pi} x^2\cos(x)\mathrm{d}x$.