NOMBRES COMPLEXES

I. Définition

Exercice 1 : Compléter le tableau suivant :

Nombre complexe z	Partie réelle de z	Partie imaginaire de z	opposé de z	conjugué de z	nombre réel : oui/non	imaginaire pur : oui/non
$2-3i$						
-6						
$-2-5i$						
$3i$						
$i-1$						
i^2						
i^3						

Exercice 2 : Les phrases suivantes sont fausses.
Rectifier chacune d'elle (sans donner la simple négation de la phrase !) :

a) 2 n'est pas un nombre complexe.
b) La partie imaginaire de $1+i$ est i.
c) $2i$ n'a pas de partie réelle.
d) La partie réelle de $1+i^2$ est 1.
e) La partie réelle de $(1+i)^2$ est 1.

II. Représentation

Exercice 3 :

1) Placer dans un repère (unité : 2 cm sur chaque axe) les points A, B, C et D d'affixes respectives : $z_A = 1+i$, $z_B = i+2$, $z_C = i-2$ et $z_D = 2i$.
2) Représenter les points E, F, G d'affixes respectives : -1 , $2+2i$, $1-i$.

Exercice 4 : Tracer dans un repère l'ensemble des points M d'affixe z dans chacun des cas suivants :

a) $\mathrm{Im}(z)=0$ b) $\mathrm{Re}(z)=1$ c) $\mathrm{Im}(z)=1$ et $-2<\mathrm{Re}(z)<2$

III. Calculs

Exercice 5 : Écrire les nombres complexes suivants sous forme algébrique :

$a=1+i-2(2-i)$ $b=1+i-2i(2-i)$ $c=(1+i)(2-i)$ $d=(2-i)^2$ $e=(2-i)^2-(2+i)^2$

Exercice 6 : Soit f la fonction définie sur par $f(z)=(1+i)z^2-z+i$.
Calculer $f(2)$, $f(i)$, $f(2-i)$ (donner le résultat sous forme algébrique).

Exercice 7 : Le nombre complexe i est-il solution de l'équation $z^3-(4+i)z^2+(13+4i)z-13i=0$?

Exercice 8 : Écrire les nombres complexes suivants sous forme algébrique :

$a=\frac{1}{i}\quad b=-\frac{1}{i}\quad c=\frac{1}{1+i}\quad d=\frac{i}{1+i}\quad e=\frac{1-i}{1+i}\quad f=\frac{1}{1+i}-\frac{i}{1-i}\quad g=\frac{1}{i-2}\quad h=\frac{i+2}{i-2}\quad k=\frac{2i}{-1+3i}$

Exercice 9 : On considère les nombres complexes $z_1=2+i\sqrt{2}$ et $z_2=2-i\sqrt{2}$.

Déterminer la forme algébrique de $\frac{z_1-3}{z_2}$.

IV. Conjugués

Exercice 10 : Soit $z_1=1-i$, $z_2=2$, $z_3=3i$, $z_4=2i-2$, $z_5=\frac{1-i}{1+i}$, $z_6=\frac{1+i}{1-i}$.

a) Donner la forme algébrique du conjugué de chacun de ces nombres.
b) Sans faire de calcul, pourquoi peut-on affirmer que z_5+z_6 est un réel et que z_5-z_6 est un imaginaire pur ?

Exercice 11 : R.O.C.

a) Démontrer qu'un nombre complexe est imaginaire pur si et seulement si $\overline{z}=-z$.
b) Démontrer qu'un nombre complexe est réel si et seulement si $\overline{z}=z$.

V. Équations

Exercice 12 : Résoudre dans les équations suivantes (donner les solutions sous forme algébrique) :

1) $3z-1=2-i$ 2) $(1-i)z=1-iz$ 3) $z^2-(1+i)z=0$ 4) $iz+1=2-i$

5) $(1+i)z=2$ 6) $iz+3=z+i$ 7) $(1+i)z=2z-i$ 8) $(1+i)z^2=z$

Exercice 13 : Résoudre dans les équations suivantes :

1) $z^2+1=0$ 2) $z^2-2z+5=0$ 3) $z^2-4z+6=0$ 4) $\frac{z-2}{z-1}=z$

Exercice 14 :

Résoudre les équations suivantes, d'inconnue z (donner les solutions sous forme algébrique) :

1) $2\overline{z}=1+i$ 2) $\frac{\overline{z}-1}{\overline{z}+1}=i$ 3) $iz-\overline{z}+2=0$ 4) $\overline{z}-3iz+6i=0$

(Pour les équations 3) et 4), on posera $z=x+iy$, avec x et y réels).

VI. Modules et distances

Exercice 15 : Calculer le module des nombres complexes suivants :

$a=-5$, $b=3i$, $c=-2i$, $d=1-i$, $e=1+i$, $f=2+2i$, $g=2i-1$, $h=\frac{1-i\sqrt{3}}{2}$, $k=3\times\frac{\sqrt{2}-i\sqrt{2}}{2}$,

$l=(1+i)^2$, $m=\frac{2}{1+i}$, $n=\frac{2+2i}{1-i}$.

Exercice 16 : $a=3+i$, $b=-1+3i$, $c=-\sqrt{5}-i\sqrt{5}$ sont les affixes respectives de trois points *A*, *B*, *C*.
Calculer les distances *OA*, *OB*, *OC* et vérifier que le point *O* est le centre du cercle circonscrit au triangle *ABC*.

Exercice 17 : On considère les points :
A d'affixe $z_A=-5+6i$, *B* d'affixe $z_B=-7-2i$, *C* d'affixe $z_C=3-2i$ et *F* d'affixe $z_F=-2+i$.
Calculer les distances *AF*, *BF* et *CF* et montrer que les points *A*, *B* et *C* sont sur un même cercle dont on précisera le centre et le rayon.

Exercice 18 : *A*, *B*, *C*, *D* et *K* sont cinq points du plan, d'affixes respectives :
$a=2-2i$, $b=-1+7i$, $c=4+2i$, $d=-4-2i$ et $k=-1+2i$.
Prouver que *A*, *B*, *C* et *D* sont sur un même cercle de centre *K* dont on déterminera le rayon.

VII. Géométrie

Figures géométriques

Exercice 19 : Soient *A*, *B* et *C* les points d'affixes respectives $z_A=-1+i$, $z_B=2+i$ et $z_C=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}i$.

a) Quelles sont les affixes des vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{BC}$?
b) Calculer les longueurs *AB*, *AC* et *BC*.
c) Quelle est la nature du triangle *ABC* ?

Exercice 20 :
Soit *A* le point d'affixe $a=3$, *B* le point d'affixe $b=5-2i$ et *C* le point d'affixe $c=5+2i$.
Montrer que le triangle *ABC* est un triangle rectangle et isocèle.

Exercice 21 : Placer dans un repère les points *A*, *B*, *C* et *D* d'affixes respectives :
$a=3i$, $b=7+2i$, $c=2-3i$ et $d=-5-2i$.
Déterminer par le calcul la nature du quadrilatère *ABCD*.

Exercice 22 : On considère les points *A*, *B* et *C* d'affixes respectives $a=4+3i$, $b=8-5i$ et $c=12+7i$.

a) Prouver que *ABC* est un triangle isocèle rectangle.
b) Déterminer par le calcul l'affixe du point *D* tel que *ABDC* soit un carré.

Transformations

Exercice 23 :
Soit *f* la transformation du plan dans lui-même qui, à tout point *M* d'affixe *z*, associe le point *M'* d'affixe z' tel que $z'=(2-2i)z+1$.
Déterminer l'affixe du point *B'*, image par *f* du point *B* d'affixe $b=3+5i$.

Exercice 24 :
On note *f* la transformation du plan dans lui-même qui, à tout point *M* d'affixe *z*, associe le point *M'* d'affixe z' tel que $z'=(1+2i)z-2-4i$. On considère les points *A* d'affixe $4+i$ et *B* d'affixe $1+i$.

a) Préciser les images par *f* de *A* et *B*.
b) Montrer que *f* admet un unique point invariant (c'est-à-dire tel que $f(M)=M$).

Exercice 25 :
Déterminer les éventuels points invariants de la transformation *f* qui à tout point d'affixe *z* distincte de $3i$ associe le point d'affixe $z' = \dfrac{3iz - 7}{z - 3i}$.

Ensembles de points

Exercice 26 :
1) Placer dans un repère les points *A*, *B* et *C* d'affixes respectives $a = 1 + i$, $b = -2$ et $c = 2i - 1$.
2) Décrire dans chaque cas l'ensemble des points *M* du plan vérifiant la condition donnée :
   a) $|z - 1 - i| = |z + 2|$ b) $|z + 2| = \sqrt{3}$ c) $|z - 2i + 1| \leqslant 2$

Exercice 27 : Déterminer l'ensemble des points *M* d'affixe *z* tels que :
   a) $|z - i| = |z + 1|$ b) $|z - 1 - i| = |3 - 4i|$ c) $|z| = 1$

Exercice 28 : Déterminer l'ensemble des points *M* d'affixe $z \neq -2$ tels que $\left|\dfrac{z - 4i}{z + 2}\right| = 1$.

Exercice 29 :
1) Démontrer que, pour tout nombre complexe *Z*, on a l'égalité : $Z\overline{Z} = |Z|^2$.
2) Déterminer l'ensemble des points *M* d'affixe *z* tels que : $\left(z + \dfrac{1}{2}\right)\overline{\left(z + \dfrac{1}{2}\right)} = \dfrac{1}{4}$.

Exercice 30 :
On considère l'application *f* qui, à tout nombre complexe *z*, associe le nombre complexe $f(z) = \dfrac{2 - iz}{1 - z}$.
On pose $z = x + iy$, avec *x* et *y* réels.
1) Écrire $f(z)$ sous forme algébrique.
2) En déduire l'ensemble des points *M* d'affixe *z* tels que $f(z)$ soit réel.