PROBABILITÉS

I. Traduction des données en termes de probabilités	***Corrigé***

D'après un texte

<u>Exercice 1</u> :

$$p(C)=\frac{25}{100}=\frac{1}{4},\ p(T)=\frac{22}{100}=\frac{11}{50},\ p(C\cap T)=\frac{15}{100}=\frac{3}{20}.$$

<u>Exercice 2</u> :

$$p(V)=\frac{1}{4},\ p(V/M)=p_M(V)=\frac{1}{10},\ p(M/V)=p_V(M)=\frac{1}{9}.$$

<u>Exercice 3</u> :

$$p(M_1)=\frac{1}{2}\ ,\ p(M_2)=\frac{1}{8}\ \text{et}\ p(M_3)=\frac{3}{8}$$

$$p(R/M_1)=p_{M_1}(R)=\frac{13}{100}\ ,\ p(R/M_2)=p_{M_2}(R)=\frac{5}{100}=\frac{1}{20}\ \text{et}\ p(R/M_3)=p_{M_3}(R)=\frac{10}{100}=\frac{1}{10}.$$

<u>Exercice 4</u> :

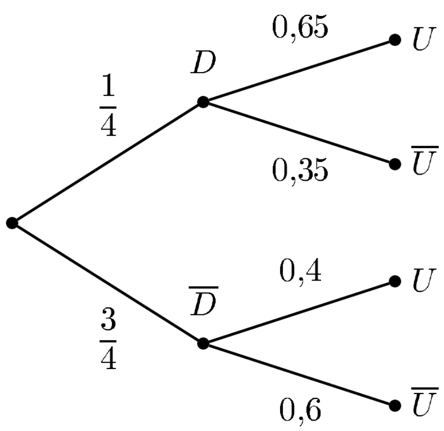
$$p(E)=\frac{60}{100}=\frac{3}{5},\ p(A/E)=p_E(A)=\frac{85}{100}=\frac{17}{20},\ p\left(\overline{A}/\overline{E}\right)=p_{\overline{E}}\left(\overline{A}\right)=\frac{70}{100}=\frac{7}{10}.$$

D'après un arbre

<u>Exercice 5</u> :

1) Les données permettent de compléter l'arbre 2 sans faire de calcul :
   le premier tableau donne les probabilités de *A*, *B*, *AB* et *O*,
   le deuxième tableau donne les probabilités de *R* conditionnées par *A*, *B*, *AB* ou *O*.
2) On lira $p(R)$ sur l'arbre 1, $p(A)$ sur l'arbre 2, $p_A(R)$ sur l'arbre 2 et $p_R(A)$ sur l'arbre 1.

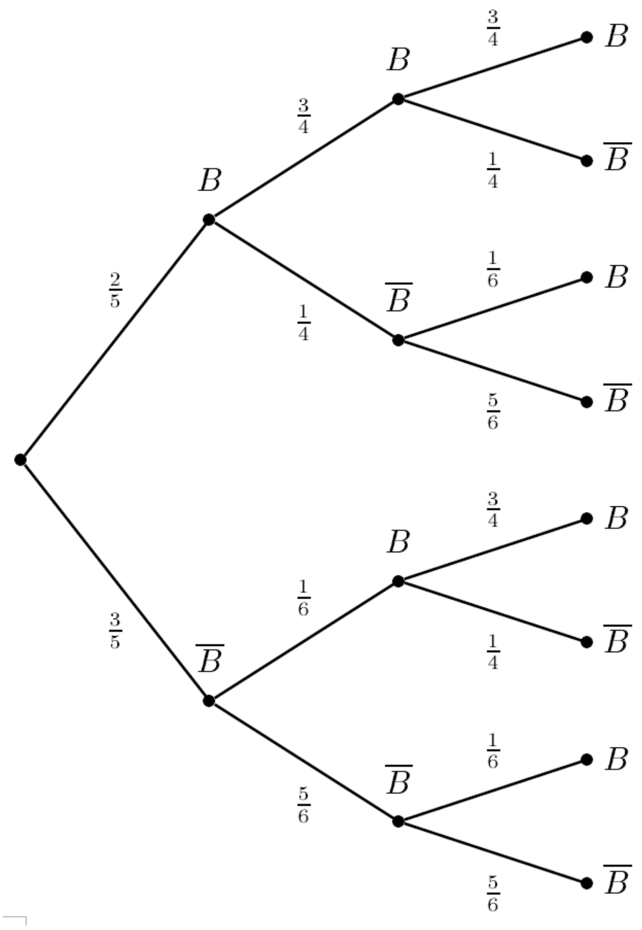
<u>Exercice 6</u> :



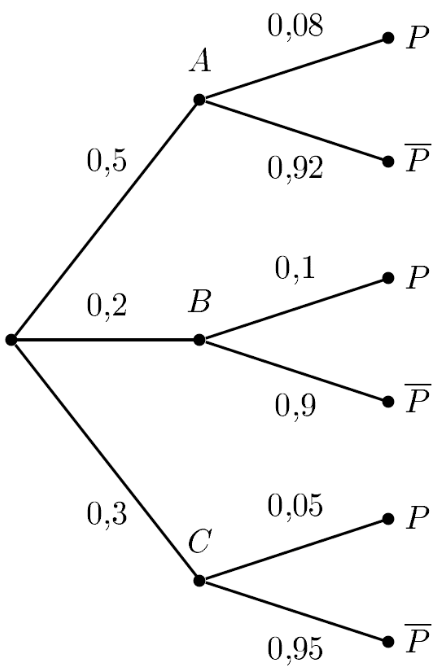
<u>Exercice 7</u> :

$$p_A(B)=\frac{3}{4},\quad p_{\overline{A}}(B)=\frac{3}{8},\quad p\left(\overline{A}\cap\overline{B}\right)=p\left(\overline{A}\right)\times p_{\overline{A}}\left(\overline{B}\right)=\frac{2}{\cancel{5}}\times\frac{\cancel{5}}{8}=\frac{1}{4},\quad p(A)=\frac{3}{5}.$$

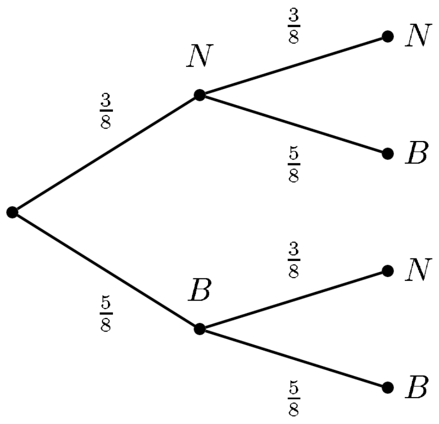
Exercice 8 :



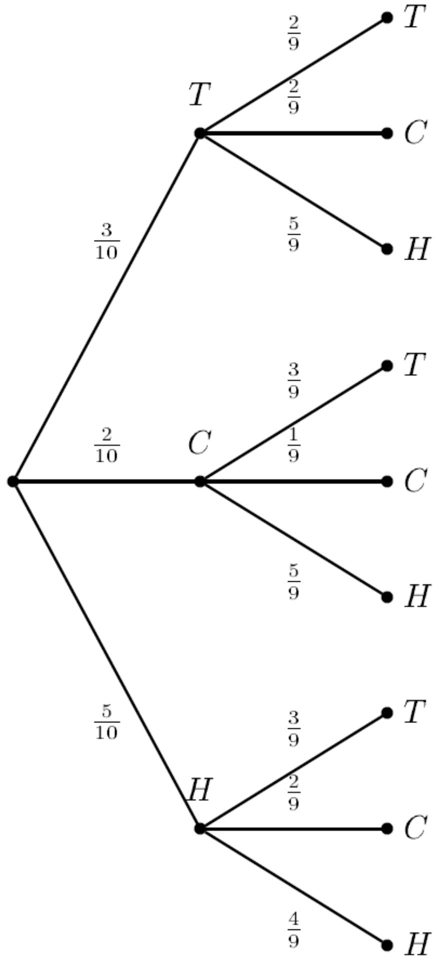
Exercice 9 :



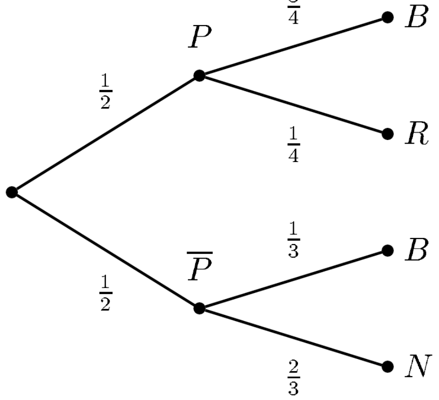
Exercice 10 :



Exercice 11 :



Exercice 12 :



D'après un tableau

Exercice 13 :

1) Il y a en tout $56+22=78$ hommes ; la probabilité pour que l'adhérent soit un homme est $\frac{78}{125}$.

Le nombre total de femmes est 47 ; la probabilité pour que l'adhérent soit une femme est $\frac{47}{125}$.

16 femmes pratiquent un sport ; la probabilité pour que l'adhérent soit une femme pratiquant un sport est $\frac{16}{125}$.

2) On se place dans l'ensemble des femmes ; 16 d'entre elles pratiquent un sport.

La probabilité cherchée est donc $\frac{16}{47}$.

Exercice 14 :

On choisit un élève au hasard ; on est donc en situation d'équiprobabilité.

1) On choisit l'élève parmi les 800 élèves du lycée. L'univers Ω est donc l'ensemble des élèves du lycée et $\text{Card}(\Omega)=800$.

$P(A)=\frac{\text{Card}(A)}{\text{Card}(\Omega)}=\frac{200}{800}=\frac{1}{4}$; $P(B)=\frac{300}{800}=\frac{3}{8}$; $P(C)=\frac{60}{800}=\frac{3}{40}$.

2) On choisit l'élève parmi les 600 élèves demi-pensionnaires. L'univers Ω' est donc l'ensemble des demi-pensionnaires et $\text{Card}(\Omega')=600$.

La probabilité pour que l'élève soit en seconde est $\frac{240}{600}=\frac{2}{5}$.

Exercice 15 :

1) On choisit un élève au hasard ; on est donc en situation d'équiprobabilité.

a) $P(A)=\frac{150}{300}=\frac{1}{2}$ b) $P(B)=\frac{30}{300}=\frac{1}{10}$ c) $P(C)=\frac{120+70}{300}=\frac{19}{30}$

d) $P(D)=\frac{120+70+80}{300}=\frac{300-30}{300}=\frac{270}{300}=\frac{9}{10}$.

Autre méthode : on peut remarquer que $D=\overline{B}$. *On a donc* $P(D)=1-P(B)=1-\frac{1}{10}=\frac{9}{10}$.

2) $A=\overline{F}$; $B=S\cap F$; $C=(F\cap\overline{S})\cup(S\cap\overline{F})$; $D=(F\cap\overline{S})\cup(S\cap\overline{F})\cup(\overline{S}\cap\overline{F})=\overline{F\cap S}$.

Exercice 16 :

1) a) $P(S)=\frac{30+50}{110}=\frac{8}{11}$, $P(F\cap S)=\frac{30}{110}=\frac{3}{11}$, $P_S(F)=\frac{30}{30+50}=\frac{3}{8}$.

b) $P(\overline{S})=\frac{12+18}{110}=\frac{3}{11}$, $P(G\cap\overline{S})=\frac{18}{110}=\frac{9}{55}$, $P_{\overline{S}}(G)=\frac{18}{12+18}=\frac{3}{5}$.

2) $P_S(F)\times P(S)=\frac{3}{\cancel{8}}\times\frac{\cancel{8}}{11}=\frac{3}{11}=P(F\cap S)$ et $P_{\overline{S}}(G)\times P(\overline{S})=\frac{3}{5}\times\frac{3}{11}=\frac{9}{55}=P(G\cap\overline{S})$.

II. Utilisation des formules pour calculer des probabilités	***Corrigé***

Exercice 17 :

$\overline{A}$ est l'événement contraire de A ; donc $p(\overline{A})=1-p(A)=1-0{,}7=0{,}3$.

$p(A\cup B)=p(A)+p(B)-p(A\cap B)=0{,}7+0{,}4-0{,}2=0{,}9$.

Exercice 18 :

$p(A\cup B)=p(A)+p(B)-p(A\cap B)$, donc

$p(A\cap B)=p(A)+p(B)-p(A\cup B)=0{,}5+0{,}6-0{,}7=0{,}4$.

Exercice 19 :

L'univers est composé des trente deux cartes.

On considère les événements A : « la carte est un as » et R : « la carte est rouge ».

On cherche la probabilité de $A\cup R$.

$p(A\cup R)=p(A)+p(R)-p(A\cap R)$.

On est en situation d'équiprobabilité, donc $p(A)=\dfrac{\text{Card}\left(A\right)}{\text{Card}\left(\Omega\right)}$.

Dans un jeu de trente deux cartes, il y a quatre as et seize cartes rouges, d'où :

$p(A)=\dfrac{4}{32}=\dfrac{1}{8}$; $p(R)=\dfrac{16}{32}=\dfrac{1}{2}$.

L'événement $A\cap R$ est composé de l'as de cœur et de l'as de carreau, $\text{Card}(A\cap R)=2$, puis

$p(A\cap R)=\dfrac{2}{32}=\dfrac{1}{16}$.

Donc : $p(A\cap R)=\dfrac{1}{8}+\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{16}=\dfrac{9}{16}$.

Exercice 20 :

On sait que $p_A(B)=\dfrac{p(A\cap B)}{p(A)}$, donc $p(A)=\dfrac{p(A\cap B)}{p_A(B)}=\dfrac{\frac{1}{6}}{\frac{1}{4}}=\dfrac{1}{6}\times\dfrac{4}{1}=\dfrac{2}{3}$.

Exercice 21 : QCM

1. $B=\overline{A}$, donc $P\left(B\right)=1-P\left(A\right)$, soit encore $P\left(A\right)=1-P\left(B\right)$. Réponse **b**.

2. A et B sont indépendants donc $P(A\cap B)=P(A)\times P(B)$.

   Alors $P_A(B)=\dfrac{P(A\cap B)}{P(A)}=\dfrac{P\left(A\right)\times P\left(B\right)}{P\left(A\right)}=P\left(B\right)$. Réponse **c**.

3. A et B sont deux événements incompatibles donc $P(A\cup B)=P(A)+P(B)$. Réponse **a**.

Formule des probabilités totales

Exercice 22 :

Les données de l'énoncé se traduisent par : $p(B)=\dfrac{1}{10}$; $p_B(\overline{G})=\dfrac{1}{6}$ et $p_{\overline{B}}(G)=\dfrac{1}{6}$.

$\left\{B,\ \overline{B}\right\}$ forme une partition de l'univers, donc d'après la formule des probabilités totales,

$p(G)=p(B\cap G)+p(\overline{B}\cap G)=p(B)\times p_B(G)+p(\overline{B})\times p_{\overline{B}}(G)$.

$p(\overline{B})=1-p(B)=\dfrac{9}{10}$; $p_B(G)=1-p_{\overline{B}}(G)=\dfrac{5}{6}$.

D'où : $p(G)=\dfrac{1}{10}\times\dfrac{5}{6}+\dfrac{9}{10}\times\dfrac{1}{6}=\dfrac{14}{60}=\dfrac{7}{30}$.

Exercice 23 :

a) Les données de l'énoncé se traduisent par :

$p(A)=\frac{1}{3}$, $p(B)=\frac{1}{4}$, $p(C)=\frac{1}{12}$, $p_A(R)=\frac{1}{20}$, $p_B(R)=\frac{1}{10}$, $p_C(R)=\frac{1}{5}$, $p_D(R)=0$.

$\{A, B, C, D\}$ forme une partition de l'univers, donc d'après la formule des probabilités totales,

$$\begin{aligned} p(R) &= p(A\cap R)+p(B\cap R)+p(C\cap R)+p(D\cap R) \\ &= \frac{1}{3}\times\frac{1}{20}+\frac{1}{4}\times\frac{1}{10}+\frac{1}{12}\times\frac{1}{5}+p(D)\times 0 \\ &= \frac{1}{60}+\frac{1}{40}+\frac{1}{60}=\frac{7}{120} \end{aligned}$$

b) On cherche à calculer $p_R(A)$: $p_R(A)=\dfrac{p(A\cap R)}{p(R)}=\dfrac{\frac{1}{60}}{\frac{7}{120}}=\dfrac{1}{60}\times\dfrac{120}{7}=\dfrac{2}{7}$.

III. Événements indépendants *Corrigé*

Exercice 24 :

On cherche $P(T\cap E)$; or T et E sont indépendants donc

$P(T\cap E)=P(T)\times P(E)=0,02\times 0,04=0,0008$.

Exercice 25 :

1) a) $P(H)=\dfrac{30}{100}+\dfrac{35}{100}=\dfrac{65}{100}=\dfrac{13}{20}$. b) $P(F)=\dfrac{10}{100}+\dfrac{25}{100}=\dfrac{35}{100}=\dfrac{7}{20}$.

2) H et F sont indépendants si $P(H\cap F)=P(H)\times P(F)$;

or $P(H\cap F)=\dfrac{30}{100}=\dfrac{3}{10}$ et $P(H)\times P(F)=\dfrac{13}{20}\times\dfrac{7}{20}=\dfrac{91}{400}$.

$P(H\cap F)\neq P(H)\times P(F)$ donc H et F ne sont pas indépendants.

H et F sont incompatibles si $P(H\cap F)=0$ ce qui n'est pas le cas. Donc H et F ne sont pas incompatibles.

Exercice 26 :

a) $P(M)=0,08$; $P(E)=0,05$; $P(M\cap E)=0,02$.

b) $P(M)\times P(E)=0,08\times 0,05=0,004\neq P(M\cap E)$ donc M et E ne sont pas indépendants.

Exercice 27 :

a) $P(A)=\dfrac{5}{3}>1$; or une probabilité est un réel appartenant à l'intervalle $[0;1]$.

La donnée de $P(A)$ est aberrante.

b) Les événements A et B seront indépendants si et seulement si $P(A\cap B)=P(A)\times P(B)$.

Donc A et B sont indépendants si et seulement si $P(A)=\dfrac{P(A\cap B)}{P(B)}=\dfrac{\frac{2}{5}}{\frac{3}{4}}=\dfrac{2}{5}\times\dfrac{4}{3}=\dfrac{8}{15}$.

Exercice 28 :

a) Dans un jeu de 32 cartes, il y a 4 dames et 16 cartes noires donc

$P(A)=\frac{4}{32}=\frac{1}{8}$ et $P(B)=\frac{16}{32}=\frac{1}{2}$.

$A\cap B$ est l'événement « la carte tirée est une dame noire » ; il y en a 2 dans le jeu donc

$P(A\cap B)=\frac{2}{32}=\frac{1}{16}$.

$P(A)\times P(B)=\frac{1}{8}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{16}=P(A\cap B)$ donc A et B sont indépendants.

b) Il y a 12 figures dans le jeu (4 valets, 4 dames et 4 rois) donc $P(B)=\frac{12}{32}=\frac{3}{8}$.

$A\cap B$ est l'événement « la carte tirée est une dame » (car les dames font partie des figures) ;

donc $P(A\cap B)=P(A)=\frac{1}{8}$.

$P(A)\times P(B)=\frac{1}{8}\times\frac{3}{8}=\frac{3}{64}\neq P(A\cap B)$ donc A et B ne sont pas indépendants.

IV. Variables aléatoires *Corrigé*

Exercice 29 :

1) Lorsqu'on tire le 3 ou le 5, on gagne respectivement 3 € ou 5 € ;
lorsqu'on tire le 2, le 4 ou le 6, on perd respectivement 1 €, 2 € ou 3 €.
Donc les valeurs prises par la variable aléatoire sont : $-1, -2, -3,\ 3$ et 5.

2) On tire au hasard une boule de l'urne donc on est en situation d'équiprobabilité.

Il y a 5 boules dans l'urne donc chaque boule est tirée avec une probabilité de $\frac{1}{5}$.

On obtient donc :

x_i	-1	-2	-3	3	5
$p(X=x_i)$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$

3) On sait que $E(X)=\sum x_i\,p(X=x_i)$ donc on obtient

$E(X)=-1\times\frac{1}{5}-2\times\frac{1}{5}-3\times\frac{1}{5}+3\times\frac{1}{5}+5\times\frac{1}{5}=\frac{-6}{5}+\frac{8}{5}=\frac{2}{5}$.

On dit que le jeu est équitable lorsque $E(X)=0$ donc le jeu n'est pas équitable.

Ici le jeu est favorable au joueur car $E(X)>0$.(L'espérance correspond au gain moyen).

Exercice 30 :

1) On mise 3 € pour jouer donc

- si on tire le billet à 100 € on gagne 97 €,
- si on tire l'un des 9 billets à 10 € on gagne 7 €,
- et si on tire l'un des 90 billets perdants , on perd 3 €.

Donc les valeurs prises par la variable aléatoire X sont -3, 7 et 97.
On tire au hasard un ticket donc on est en situation d'équiprobabilité. On a 100 tickets donc chaque ticket est tiré avec une probabilité de $\frac{1}{100}$. On obtient donc :

$p(X=-3)=\frac{90}{100}=\frac{9}{10}$, $p(X=7)=\frac{9}{100}$, $p(X=97)=\frac{1}{100}$.

x_i	-3	7	97
$p(X=x_i)$	$\frac{9}{10}$	$\frac{9}{100}$	$\frac{1}{100}$

3) On sait que $E(X)=\sum x_i\, p(X=x_i)$ donc on obtient

$$E(X)=-3\times\frac{9}{10}+7\times\frac{9}{100}+97\times\frac{1}{100}=\frac{-270}{100}+\frac{160}{100}=\frac{-110}{100}=-1{,}1.$$

L'espérance correspond au gain moyen par partie, donc on perd en moyenne 1,1 € par partie.

Exercice 31 :

1) Les valeurs prises par la variable aléatoire sont : -2, -1 et 5 :

-2 lorsque la couleur est rouge,
-1 lorsque la couleur est verte,
et 5 lorsque la couleur est jaune.

2) $p(\text{"}\textit{la couleur est rouge}\text{"})=\frac{1}{6}$ car il y a un secteur rouge sur les six.

$p(\text{"}\textit{la couleur est verte}\text{"})=\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$ car il y a deux secteurs verts sur les six.

$p(\text{"}\textit{la couleur est jaune}\text{"})=\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$ car il y a trois secteurs jaunes sur les six.

On a donc

$p(X=-2)=\frac{1}{6}$; $p(X=-1)=\frac{1}{3}$ et $p(X=5)=\frac{1}{2}$.

x_i	-2	-1	5
$p(X=x_i)$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$

3) On sait que $E(X)=\sum x_i\, p(X=x_i)$ donc on obtient

$$E(X)=-2\times\frac{1}{6}-1\times\frac{1}{3}+5\times\frac{1}{2}=\frac{-2}{3}+\frac{5}{2}=\frac{-4+15}{6}=\frac{11}{6}.$$

L'espérance correspond au gain moyen donc en moyenne on gagnera 1,83 euros par partie.