PROBABILITÉS

I. Traduction des données en termes de probabilités

D'après un texte

Exercice 1 :
On sait que 25% des individus d'une population lycéenne pratiquent le cyclisme, que 22 % pratiquent le tennis et que 15% pratiquent les deux sports.
On interroge au hasard une personne de cette population.
On appelle C : « la personne interrogée pratique le cyclisme »
T : « la personne interrogée pratique le tennis ».
Traduire les données en termes de probabilités.

Exercice 2 :
On veut tester l'efficacité d'un médicament sur une population donnée. Un quart de la population a été vacciné.
Au cours d'une épidémie, on constate qu'il y a 1 vacciné sur 10 malades.
D'autre part, parmi les vaccinés, on compte $\frac{1}{9}$ de malades.
On choisit au hasard une personne de cette population.
On note M : la personne est malade et V : la personne est vaccinée.
Traduire toutes les données en termes de probabilités.

Exercice 3 :
Un grossiste en appareils ménagers est approvisionné par trois marques, notées respectivement M_1, M_2 et M_3.
La moitié des appareils de son stock provient de M_1, un huitième de M_2 et trois huitièmes de M_3.
Ce grossiste sait que 13% des appareils de la marque M_1 sont rouges, 5% de ceux de la marque M_2 sont rouges et 10% de ceux de la marque M_3 sont rouges.
On choisit au hasard un appareil dans le stock.
On appelle M_1 l'événement : l'appareil est de marque M_1
M_2 l'événement : l'appareil est de marque M_2
M_3 l'événement : l'appareil est de marque M_3
R l'événement : l'appareil est rouge.
Traduire ces données en termes de probabilités.

Exercice 4 :
Un sondage effectué auprès des automobilistes ayant effectué un trajet reliant deux villes V et V' montre que 60 % des automobilistes transportent des enfants et que, parmi ceux-ci, 85 % se sont arrêtés au moins une fois au cours du trajet, alors que 70 % des automobilistes voyageant sans enfant ne se sont pas arrêtés.
On interroge au hasard un automobiliste. On note :
A l'événement "l'automobiliste interrogé s'est arrêté au moins une fois",
E l'événement "l'automobiliste interrogé transporte des enfants".
Traduire ces données en termes de probabilités.

D'après un arbre

Exercice 5 :
Le sang d'un être humain appartient à un des 4 groupes sanguins : A, B, AB et O.

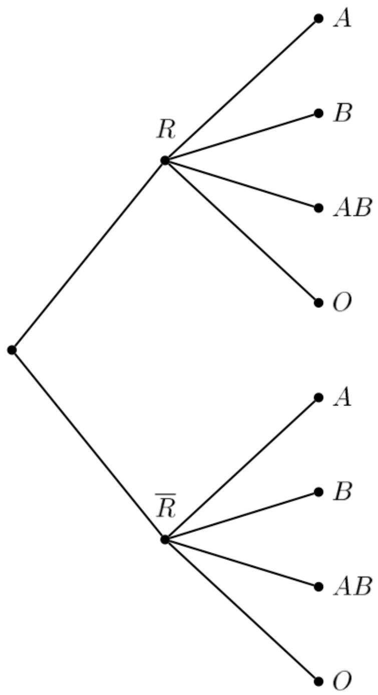
De plus il possède ou non l'antigène Rhésus. Le sang d'une personne du groupe A porteur de l'antigène sera noté A^+.
La répartition des groupes sanguins en France est approximativement :

A	B	AB	O
44%	8%	3%	45%

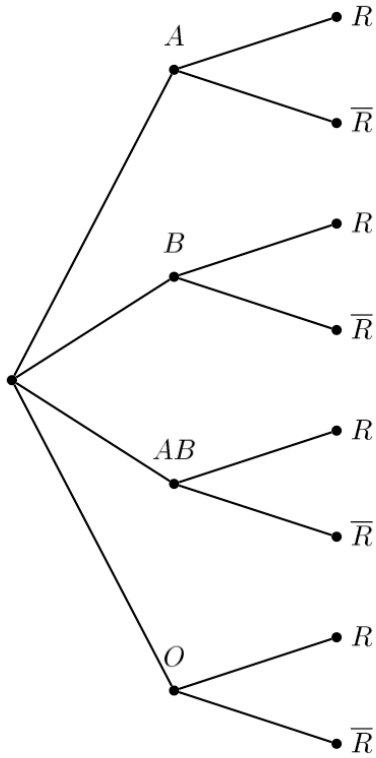
Pour chaque groupe, on connaît aussi la proportion d'individus possédant l'antigène Rhésus :

Groupe sanguin	A	B	AB	O
Possèdent l'antigène Rhésus	85%	81%	87%	84%

On note R : « l'individu est porteur de l'antigène Rhésus » et $\overline{R}$ sinon.
Un personne est prise au hasard.
1) Lequel de ces deux arbres pourra-t-on compléter avec les données sans faire de calcul ?
2) Sur lequel pourra-t-on lire $p(R)$? $p(A)$? $p_A(R)$? $p_R(A)$?



Arbre 1



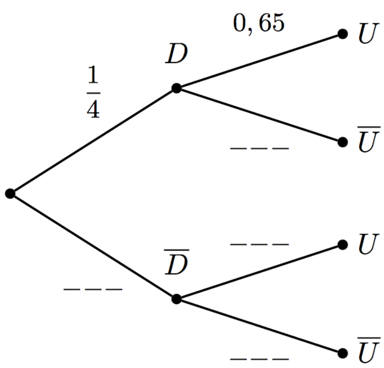
Arbre 2

Exercice 6 :
La médiathèque d'une université possède des DVD de deux provenances : les DVD reçus en dotation et les DVD achetés.
Par ailleurs, on distingue les DVD qui sont de production européenne et les autres.
On choisit au hasard un de ces DVD. On note :

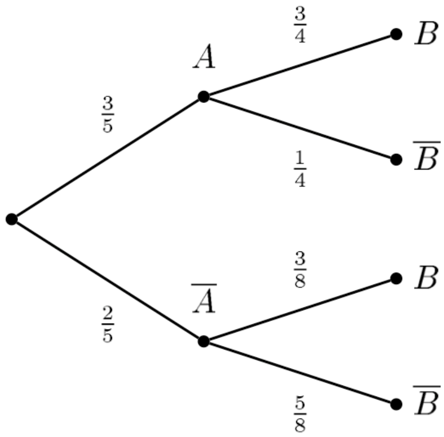
- D l'événement « le DVD a été reçu en dotation » et $\overline{D}$ l'événement contraire.
- U l'événement « le DVD est de production européenne » et $\overline{U}$ l'événement contraire.

On sait que $p_{\overline{D}}(U) = 0,4$.
On modélise cette situation par l'arbre incomplet ci-contre :

Compléter l'arbre.

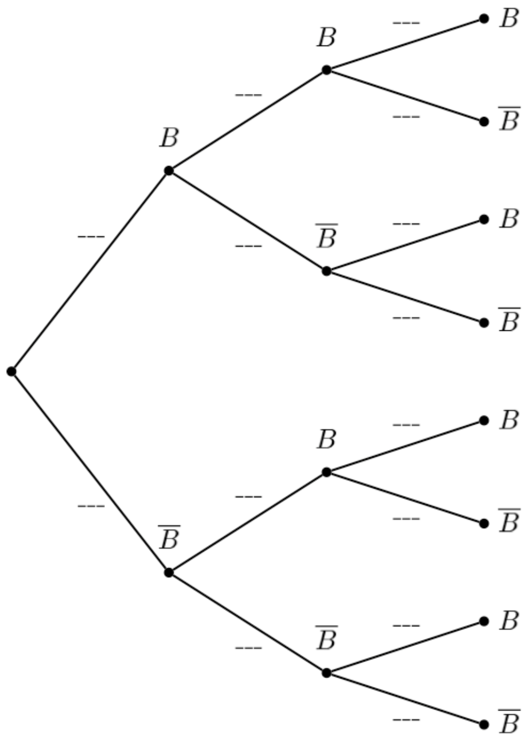


Exercice 7 :
On propose l'arbre pondéré suivant :



Déterminer $p_A(B)$, $p_{\overline{A}}(B)$, $p\left(\overline{A}\cap\overline{B}\right)$, $p(A)$.
On donnera le résultat sous la forme d'une fraction irréductible.

Exercice 8 :
Pour une excursion en montagne de trois jours, on s'intéresse à la météo.
On note B l'événement : « il fait beau ».
La météo annonce que la probabilité qu'il fasse beau le premier jour est de $\dfrac{2}{5}$,
s'il fait beau, alors la probabilité qu'il fasse beau le jour suivant est de $\dfrac{3}{4}$,
s'il ne fait pas beau, alors la probabilité qu'il fasse beau le jour suivant est $\dfrac{1}{6}$.
Compléter l'arbre pondéré ci-dessous associé à cette expérience.



Exercice 9 :

Une entreprise fournit des testeurs à trois entreprises A, B et C dans les proportions 50% 20% et 30%.
Pendant la période de garantie, 8% des testeurs de l'entreprise A tombent en panne, 10% de ceux de l'entreprise B et 5% de ceux de l'entreprise C tombent en panne.

On note :

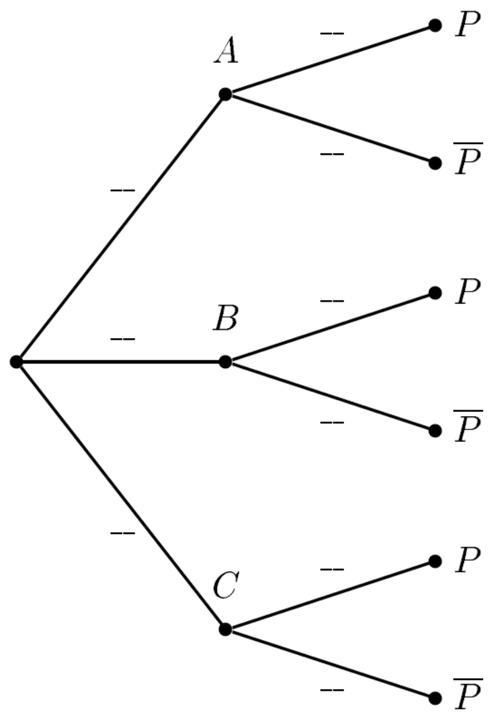
A : « le testeur a été fourni à l'entreprise A »,

B : « le testeur a été fourni à l'entreprise B »,

C : « le testeur a été fourni à l'entreprise C »,

P : « le testeur tombe en panne pendant la garantie » et $\overline{P}$ l'événement contraire.

Compléter l'arbre pondéré suivant :



Exercice 10 :

Un sac contient 3 boules noires et 5 boules blanches indiscernables au toucher.
On tire de façon aléatoire une boule, puis on la remet dans le sac. On tire à nouveau une boule.

On note :

N : « la boule tirée est noire » ; B : « la boule tirée est blanche ».

Construire l'arbre pondéré associé à cette expérience.

Exercice 11 :

Un sac contient 3 jetons triangulaires, 2 jetons carrés et 5 jetons hexagonaux. Deux jetons sont tirés successivement sans remise du sac. On s'intéresse au couple formé par les deux jetons.

On note :

T : « le jeton est triangulaire » ; C : « le jeton est carré » ; H : « le jeton est hexagonal ».

Construire l'arbre pondéré associé à cette expérience.

Exercice 12 :

On dispose de deux urnes.

La première contient 3 boules blanches et une boule rouge.

La seconde contient 2 boules blanches et 4 boules noires.

On lance une pièce. Si on obtient pile, on tire une boule de la première urne, sinon, on tire une boule de la deuxième urne.

On note P : « La pièce est tombée sur pile » ;

B : « la boule tirée est blanche » ; R : « la boule tirée est rouge » ; N : « la boule tirée est noire ».

Construire l'arbre pondéré associé à cette expérience.

D’après un tableau

Exercice 13 :
Un club a 125 adhérents qui se répartissent de la façon suivante :

	hommes	femmes
pratiquent un sport	56	16
ne pratiquent aucun sport	22	31

On choisit un adhérent au hasard.
1) Quelle est la probabilité pour que ce soit un homme ? une femme ? une femme pratiquant un sport ?
2) La personne choisie est une femme. Quelle est la probabilité pour qu’elle pratique un sport ?

Exercice 14 :
Les 800 élèves d’un lycée sont répartis dans les classes de seconde, première ou terminale selon le tableau suivant :

	Seconde	**Première**	**Terminale**	**Total**
Externes	60	50	90	200
Demi-pensionnaires	240	200	160	600
Total	300	250	250	800

1) On choisit un élève au hasard parmi les 800. Donner la probabilité des événements suivants :
   A : « il est externe » ; B : « il est en seconde » ; C : « c’est un élève de seconde externe ».
2) On choisit un élève au hasard parmi les demi-pensionnaires.
   Quelle est la probabilité pour que cet élève soit en seconde ?

Exercice 15 :
Un sondage a été réalisé parmi la population des 300 élèves de terminale d’un lycée ; deux questions ont été posées : “ Êtes-vous fumeur ? ”, “ Pratiquez-vous un sport ? ”.
Les résultats obtenus ont permis d’établir le tableau suivant :

	Nombre de sportifs	Nombre de non sportifs	Total
Nombre de fumeurs	30	120	150
Nombre de non-fumeurs	70	80	150
Total	100	200	300

1) Un élève de terminale est choisi au hasard. Quelle est la probabilité des événements suivants :
   a) A : « Il ne fume pas. »
   b) B : « C’est un sportif qui fume. »
   c) C : « Il est soit fumeur non sportif soit sportif et non-fumeur. »
   d) D : « Il ne fait pas partie des sportifs qui fument. »
2) On note F l’événement : « Il fume » et S l’événement : « Il pratique un sport ».
   Écrire les événements A, B, C et D à l’aide de F et S.

Exercice 16 :
110 élèves de terminale se répartissent de la façon suivante :

	Filles	Garçons
Pratiquant un sport	30	50
Ne pratiquant aucun sport	12	18

On choisit un élève au hasard parmi les 110. On a une situation d'équiprobabilité.
On considère les événements suivants :

F : "L'élève est une fille" ; G : " L'élève est un garçon" ;
S : "L'élève pratique un sport" ; $\overline{S}$: " L'élève ne pratique aucun sport".

1) Déterminer à l'aide du tableau les probabilités suivantes :
   a) $P(S)$, $P(F \cap S)$, $P_S(F)$.
   b) $P(\overline{S})$, $P(G \cap \overline{S})$, $P_{\overline{S}}(G)$.
2) Vérifier que $P(F \cap S) = P_S(F) \times P(S)$ et que $P(G \cap \overline{S}) = P_{\overline{S}}(G) \times P(\overline{S})$.

II. Utilisation des formules pour calculer des probabilités

Exercice 17 :
A et B sont deux événements d'un espace probabilisé.
On sait que : $p(A) = 0{,}7$; $p(B) = 0{,}4$ et $p(A \cap B) = 0{,}2$.
Calculer $p\left(\overline{A}\right)$ et $p(A \cup B)$.

Exercice 18 :
A et B sont deux événements d'un espace probabilisé.
On sait que : $p(A) = 0{,}5$; $p(B) = 0{,}6$ et $p(A \cup B) = 0{,}7$.
Calculer $p(A \cap B)$.

Exercice 19 :
On extrait au hasard une carte d'un jeu de trente deux cartes.
Calculer la probabilité d'obtenir un as ou une carte rouge.

Exercice 20 :
A et B sont deux événements d'un espace probabilisé.
On sait que $p(A \cap B) = \dfrac{1}{6}$ et $p_A(B) = \dfrac{1}{4}$.
Calculer $p(A)$.

Exercice 21 : QCM
Pour chaque question, une seule des trois propositions **a**, **b** ou **c** est exacte. Noter la lettre correspondant à la bonne réponse, sans justification.
A et B désignent des événements associés à une expérience aléatoire.

1. Si B est l'événement contraire de A, alors

   a : $P(A) = 1 + P(B)$ **b** : $P(A) = 1 - P(B)$ **c** : $P(A) = P(B)$

2. Si A et B sont deux événements indépendants et $P(A) \neq 0$, alors

   a : $P(A \cup B) = P(A) \times P(B)$ **b** : $A \cap B = \varnothing$ **c** : $P_A(B) = P(B)$

3. Si A et B sont deux événements incompatibles, alors

   a : $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$ **b** : $P(A) = 1 - P(B)$ **c** : $P(A \cap B) = 1$

Formule des probabilités totales

Exercice 22 :
Pour réaliser une loterie, un organisateur dispose d'une part d'un sac contenant exactement un jeton blanc et 9 jetons noirs indiscernables au toucher et d'autre part d'un dé cubique équilibré dont les faces sont numérotées de 1 à 6.
Il décide des règles suivantes pour le déroulement d'une partie :
Le joueur doit tirer un jeton, puis jeter le dé :

- si le jeton est blanc, le joueur perd lorsque le jet du dé donne 6 (et gagne sinon) ;
- si le jeton est noir, le joueur gagne lorsque le jet du dé donne 6 (et perd sinon).

À la fin de la partie, le jeton est remis dans le sac.
On note B l'événement : « le jeton tiré est blanc » et G l'événement : « le joueur gagne le jeu ».

Montrer que la probabilité de l'événement G est $\frac{7}{30}$.

Exercice 23 :
Pour se rendre au lycée, un élève a le choix entre quatre itinéraires distincts a, b, c ou d.

Les probabilités pour l'élève de choisir l'itinéraire a ou b ou c sont respectivement : $\frac{1}{3};\frac{1}{4};\frac{1}{12}$.

La probabilité pour l'élève d'arriver en retard est : $\frac{1}{20}$ s'il emprunte l'itinéraire a, $\frac{1}{10}$ s'il emprunte l'itinéraire b, $\frac{1}{5}$ s'il emprunte l'itinéraire c. En empruntant l'itinéraire d, il n'est jamais en retard.

On note :
A l'événement : « l'élève choisit l'itinéraire a », B l'événement : « l'élève choisit l'itinéraire b »,
C l'événement : « l'élève choisit l'itinéraire c », D l'événement : « l'élève choisit l'itinéraire d »,
R l'événement : « l'élève arrive en retard ».

a) Déterminer la probabilité de R.
b) L'élève arrive en retard. Quelle est la probabilité qu'il ait emprunté l'itinéraire a ?

III. Événements indépendants

Exercice 24 :
On étudie les performances d'une photocopieuse dans une entreprise. Les copies réalisées avec cette photocopieuse peuvent présenter deux types de défauts liés, l'un à la qualité du tambour de la photocopieuse (défaut T), l'autre à la qualité de l'encre en poudre utilisée (défaut E).
On prélève une copie au hasard dans l'ensemble des copies réalisées pendant une journée donnée.
L'événement T : « la copie prélevée présente le défaut T » a pour probabilité $P(T)=0,02$ et l'événement E : « la copie prélevée présente le défaut E » a pour probabilité $P(E)=0,04$.

On admet que les événements T et E sont indépendants.
Calculer la probabilité que la copie prélevée présente les deux défauts.

Exercice 25 :
On a effectué une enquête dans une entreprise pour connaître la répartition des personnes favorables pour travailler le samedi. On a obtenu le tableau ci-contre :

	Femmes	Hommes
Favorables	10 %	30 %
Non favorables	25 %	35 %

1) On interroge au hasard une personne de l'entreprise ; quelle est la probabilité pour que :
   a) ce soit un homme (événement H) ?
   b) cette personne soit favorable (événement F) ?
2) Les deux événements H et F sont-ils indépendants ? incompatibles ?

Exercice 26 :
Une entreprise fabrique des appareils électriques. Afin de contrôler la conformité des appareils, on procède à deux tests : l'un de type mécanique, l'autre de type électrique.
Une étude statistique de la production conduit à dégager les résultats suivants :

- 8% des appareils sont défectueux pour le test mécanique ;
- 5% des appareils sont défectueux pour le test électrique ;
- 2% des appareils sont défectueux pour les deux tests.

On prélève au hasard un appareil dans la production. On appelle :

M l'événement « l'appareil prélevé présente un défaut de type mécanique »,
E l'événement « l'appareil prélevé présente un défaut de type électrique ».

a) À l'aide des informations contenues dans l'énoncé, donner $P(M)$, $P(E)$ et $P(M \cap E)$.
b) Les événements M et E sont-ils indépendants ?

Exercice 27 :
Soit A et B deux événements liés à une expérience aléatoire.
On donne $P(A) = \frac{5}{3}$ $P(B) = \frac{3}{4}$ $P(A \cap B) = \frac{2}{5}$.

a) L'une de ces données est aberrante. Laquelle ? Pourquoi ?
b) Modifier cette donnée de façon que les événements A et B soient indépendants.

Exercice 28 :
On tire au hasard une carte dans un jeu de 32 cartes. Les 32 événements élémentaires sont équiprobables. Les événements A et B suivants sont-ils indépendants ?

a) A : "la carte tirée est une dame" ; B : "la carte tirée est noire".
b) A : "la carte tirée est une dame" ; B : "la carte tirée est une figure" (valet, dame, roi).

IV. Variables aléatoires

Exercice 29 :
Un jeu consiste à tirer une boule d'une urne contenant 5 boules numérotées de 2 à 6 indiscernables au toucher.
Le tirage d'une boule portant un numéro pair fait perdre une somme, en euros, égale à la moitié du numéro tiré.
Le tirage d'une boule portant un numéro impair rapporte une somme, en euros, égale au numéro tiré.
Soit X la variable aléatoire égale au gain éventuellement négatif obtenu à l'issue du tirage.
1) Quelles sont les valeurs prises par cette variable aléatoire ?
2) Déterminer la loi de probabilité de X.
3) Calculer l'espérance mathématique de X. Le jeu est-il équitable ?

Exercice 30 :
Dans une tombola, 100 tickets sont en jeu. La répartition est la suivante :

- un ticket permet de gagner 100 €,
- neuf tickets permettent de gagner 10 €,
- les autres tickets sont perdants.

Pour jouer, il faut miser 3 € et on tire un ticket au hasard. On appelle X son gain.
1) Quelles sont les valeurs prises par la variable aléatoire X ?
2) Déterminer la loi de probabilité de X.
3) Calculer l'espérance de X. Interpréter ce résultat.

Exercice 31 :
Un forain propose le jeu suivant : le joueur fait tourner une roue divisée en six secteurs identiques
Trois secteurs sont jaunes, deux secteurs sont verts et un secteur est rouge.
Le joueur fait tourner la roue.

- si la couleur est verte, le joueur perd 1 euro,
- si la couleur est rouge , il perd 2 euros,
- si la couleur est jaune, il gagne 5 euros.

On définit la variable aléatoire X égale au gain du joueur.
1) Quelles sont les valeurs prises par cette variable aléatoire ?
2) Déterminer la loi de probabilité de X.
3) Calculer l'espérance de X. Interpréter ce résultat.