DÉRIVATION

I. Calculs de dérivées

Exercice 1 : u et v désignent des fonctions dérivables, k est un réel et n un entier naturel non nul.

$(u+v)' = u' + v'$ $\qquad$ $(ku)' = ku'$ $\qquad$ $(uv)' = u'v + uv'$

$\left(\dfrac{u}{v}\right)' = \dfrac{u'v - uv'}{v^2}$ $\qquad$ $(u^n)' = nu^{n-1}u'$

Pour calculer la dérivée de chacune des fonctions suivantes, on doit utiliser l'une des formules ci-dessus. Choisir la bonne formule en précisant qui est u, v ou k.
(On ne demande pas le calcul de $f'(x)$).

a) $f(x) = 2x + \sqrt{x}$ $\qquad$ b) $f(x) = 7x\sqrt{x}$ $\qquad$ c) $f(x) = 5(x^2 + 5x)$

d) $f(x) = \dfrac{5(x^2+1)}{3}$ $\qquad$ e) $f(x) = -3x^2(x+1)$ $\qquad$ f) $f(x) = \dfrac{-3x}{x+1}$

g) $f(x) = \dfrac{1}{4}(2x^2 + 3x)$ $\qquad$ h) $f(x) = 2x + 1 + \dfrac{1}{x}$ $\qquad$ i) $f(x) = (2x+5)^3$

Exercice 2 : Calculer la dérivée de la fonction f sur l'intervalle proposé.

a) sur $]0;+\infty[$, $f(x) = \dfrac{1}{5}(x^2 + 2x + 3)$ $\qquad$ b) sur $\mathbb{R}$, $f(x) = (3x^2+1)(2-x)$

c) sur $\mathbb{R}$, $f(x) = (x^2 - 2x + 5)^3$

Exercice 3 : Calculer la dérivée de la fonction f sur l'intervalle proposé.

a) sur $]1;+\infty[$, $f(x) = \dfrac{x^2 - 4x + 7}{1-x}$ $\qquad$ b) sur $]-1;+\infty[$, $f(x) = \dfrac{1-x}{1+x^3}$

c) sur $\mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{3}{2x^2+1}$ $\qquad$ d) sur $]0;+\infty[$, $f(x) = \dfrac{x}{2} + \dfrac{1}{3x}$

e) sur $]-5;+\infty[$, $f(x) = 1 - \dfrac{1}{x+5}$ $\qquad$ f) sur $]0;+\infty[$, $f(x) = (2x+1)\sqrt{x}$

II. Étude du signe de la dérivée

<u>Exercice 4</u> : Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = x^3 + x^2 - x - 1$.
Calculer $g'(x)$, étudier le signe de $g'(x)$ et faire le tableau de variation de g sur **R**.

<u>Exercice 5</u> : Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3 - 18x^2 + 108x - 80$.
Calculer $f'(x)$ et étudier le signe de $f'(x)$. En déduire la variation de f.

<u>Exercice 6</u> : Soit f la fonction définie et dérivable, de dérivée f' sur $\mathbb{R} \setminus \left\{\frac{2}{3}\right\}$.

On donne $f'(x) = \dfrac{5x}{3x+2}$. Étudier le signe de $f'(x)$.

<u>Exercice 7</u> : On sait que $f'(x) = \dfrac{x^2 + 2x + 6}{x - 1}$. Étudier le signe de $f'(x)$ selon les valeurs de x.

<u>Exercice 8</u> : Soit f la fonction dérivable sur $D = \left]-\infty ; -2\right[\cup \left]-2 ; +\infty\right[$, définie par $f(x) = \dfrac{-x^3}{2(x+2)}$.
Calculer $f'(x)$ et étudier le signe de $f'(x)$ sur D.

III. Tangentes

Écrire l'équation d'une tangente

Exercice 9 : Soit *f* la fonction définie sur $\left[-\frac{1}{2}\ ;+\infty\right[$ par $f(x)=\sqrt{2x+1}$.
On note *C* sa courbe représentative dans le plan rapporté à un repère orthogonal.
Déterminer une équation de la tangente à la courbe *C* au point d'abscisse 3.

Exercice 10 : Soit *f* la fonction définie sur $\left]-\infty\ ;\frac{1}{3}\right[$ par $f(x)=\frac{5}{3x-1}$.
On note *C* sa courbe représentative dans le plan rapporté à un repère orthogonal.
Déterminer une équation de la tangente à la courbe *C* au point d'abscisse -1.

Étudier la position d'une courbe par rapport à sa tangente

Exercice 11 : Soit *f* la fonction définie sur $]0\ ;+\infty[$ par $f(x)=2x-1+\frac{3}{x}$.
On note *C* sa courbe représentative dans le plan rapporté à un repère orthogonal.
Déterminer une équation de la tangente *T* à la courbe *C* au point d'abscisse 1, puis étudier la position de la courbe *C* par rapport à *T*.

Exercice 12 : Soit *f* la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=x^3-5x^2+3x+1$.
On note *C* sa courbe représentative dans le plan rapporté à un repère orthogonal.
Déterminer une équation de la tangente *T* à la courbe *C* au point d'abscisse 0, puis étudier la position de la courbe *C* par rapport à *T*.

Exercice 13 : Soit *f* la fonction définie sur $]-\infty\ ;2[$ par $f(x)=\frac{4x+1}{x-2}$.
On note *C* sa courbe représentative dans le plan rapporté à un repère orthogonal.
Déterminer une équation de la tangente *T* à la courbe *C* au point d'abscisse 1, puis étudier la position de la courbe *C* par rapport à *T*.

Déterminer une tangente parallèle à une droite donnée

Exercice 14 : Soit *f* la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=x^3-5x^2+x+1$.
On note *C* sa courbe représentative dans le plan rapporté à un repère orthogonal.
Soit D la droite d'équation $y=-6x+1$.
Déterminer l'abscisse du (ou des) point(s) de *C* en lesquels la tangente est parallèle à D.

Exercice 15 : Soit *f* la fonction définie sur $\mathbb{R} \setminus \{3\}$ par $f(x)=\frac{4x+7}{x+3}$.
On note *C* sa courbe représentative dans le plan rapporté à un repère orthogonal.
Soit D la droite d'équation $y=-5x+3$.
Déterminer l'abscisse du (ou des) point(s) de *C* en lesquels la tangente est parallèle à D.

Déterminer une tangente passant par l'origine du repère

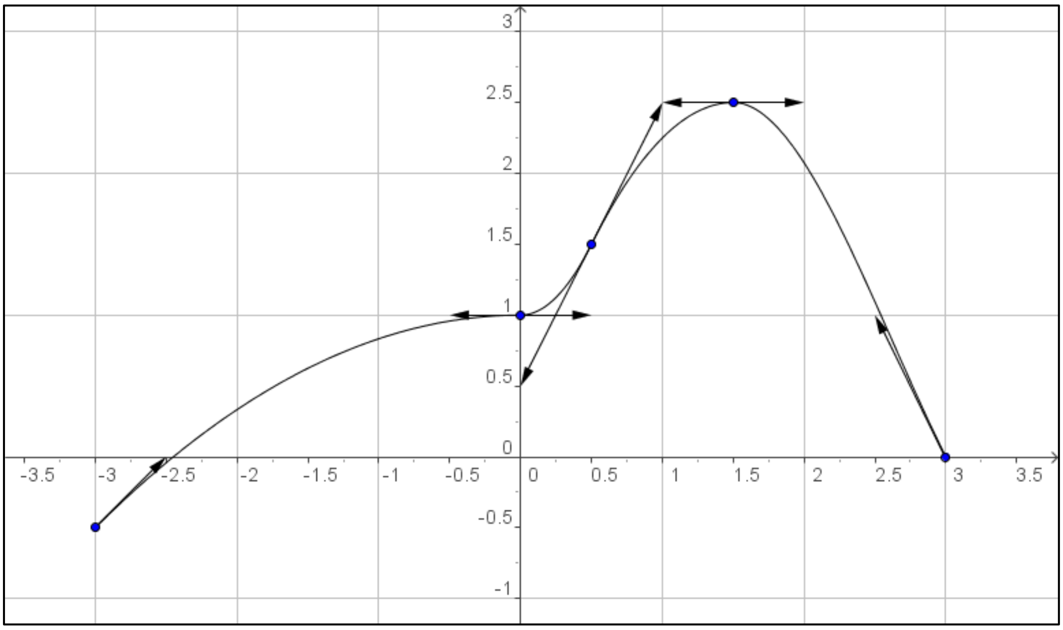
Exercice 16 : Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=\sqrt{x^2+1}$.
On note C sa courbe représentative dans le plan rapporté à un repère orthogonal.
Existe-t-il des tangentes à C passant par l'origine du repère ?

Exercice 17 : Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=(2x-1)^3$.
On note C sa courbe représentative dans le plan rapporté à un repère orthogonal.
Existe-t-il des tangentes à C passant par l'origine du repère ?

IV. Lectures graphiques

Exercice 18 :

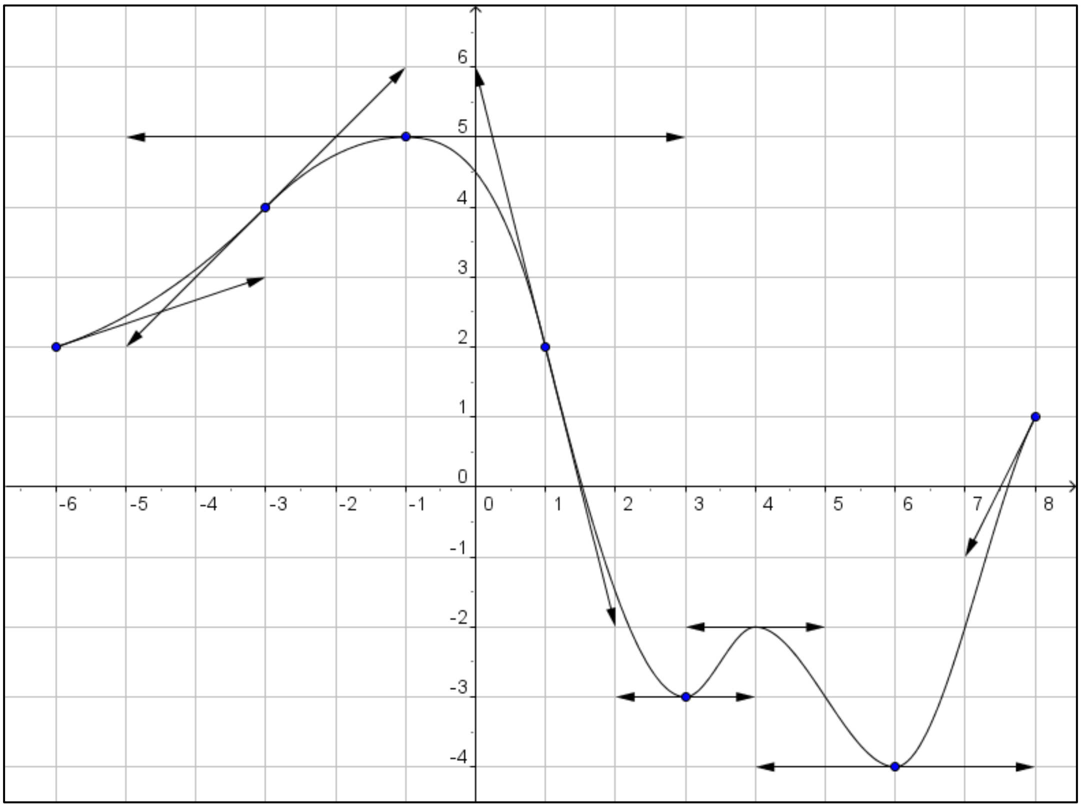
Soit une fonction f définie sur $[-3;3]$ dont la courbe représentative est donnée ci-dessous.



Lire graphiquement $f'(-3)$, $f'(0)$, $f'\left(\dfrac{1}{2}\right)$, $f'\left(\dfrac{3}{2}\right)$ et $f'(3)$.

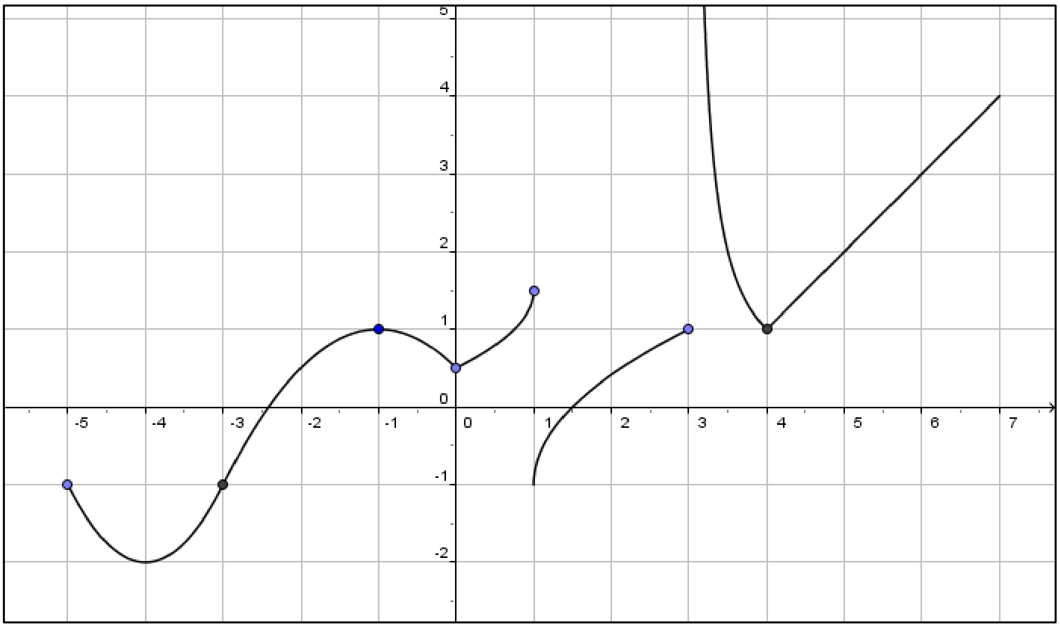
Exercice 19 :

Soit une fonction f définie sur $[-6;8]$ dont la courbe représentative est donnée ci-dessous.



Construire le tableau de signe de la fonction dérivée de f.

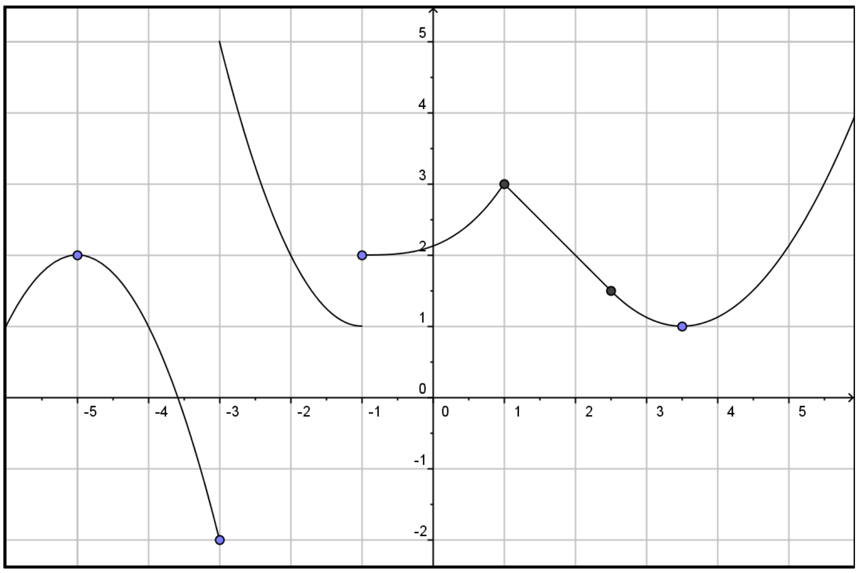
Exercice 20
Soit une fonction *f* dont on donne la courbe représentative ci-dessous.



1) Dans chacun des cas suivants, dire si la fonction est continue en α (justifier la réponse).
   a) $\alpha = -3$ b) $\alpha = -1$ c) $\alpha = 0$ d) $\alpha = 1$ e) $\alpha = 3$ f) $\alpha = 4$.

2) De même, dire pour chaque cas si la fonction est dérivable en α.

Exercice 21 : Soit une fonction *f* dont on donne la courbe représentative ci-dessous.



1) Dans chacun des cas suivants, dire si la fonction est continue en α (justifier la réponse).
   a) $\alpha = -5$ b) $\alpha = -3$ c) $\alpha = -1$ d) $\alpha = 1$ e) $\alpha = 2{,}5$ f) $\alpha = 3{,}5$.

2) De même, dire pour chaque cas si la fonction est dérivable en α.

V. Théorème des valeurs intermédiaires

Exercice 22 : On considère f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 3x^3 + 6x^2 + 1$.
On admet que f est strictement décroissante sur $[-1;0]$.
Montrer que l'équation $f(x) = 2$ admet une unique solution dans $[-1;0]$.

Exercice 23 : On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3 + 2x + 1$.
On connaît le tableau de variation de la fonction f donné ci-dessous.

x	$-\infty$		$+\infty$
$f(x)$	$-\infty$	↗	$+\infty$

Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution dans **R**.

Exercice 24 : Soit f la fonction définie sur **R** \ $\{4\}$ dont on donne le tableau de variation ci-dessous.

x	$-\infty$		1		4		6		7
$f(x)$	$-\infty$	↗	2	↘	$\frac{1}{2}$ ‖ -5	↗		↗	$+\infty$

En utilisant le tableau de variation, déterminer le nombre de solutions de l'équation

a) $f(x) = 0$ b) $f(x) = 4$ c) $f(x) = -7$.

Exercice 25 : Soit f la fonction définie sur R par $f(x) = 2x^3 + x + 1$.
1) Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution dans **R**.
2) En déduire le signe de $f(x)$ suivant les valeurs de x.

VI. Algorithmes

Exercice 26 : On considère la fonction f définie par $f(x)=2x^3+x+1$.
Ecrire un algorithme qui demande les valeurs de *a, b* et qui détermine si le point de coordonnées $(a;b)$ appartient ou non à la courbe représentant f. L'implémenter ensuite sur votre calculatrice et le tester avec $(5 ; 1,2)$.

Exercice 27 : On considère la fonction *f* définie par $f(x)=ax^2+bx+c$ avec

1) Ecrire un algorithme qui demande les valeurs de *a, b, c* et qui calcule et affiche les coordonnées du sommet de la parabole représentant *f.*
2) Qu'affiche cet algorithme lorsque a = 2, b = 5 et c = 1.

Exercice 28 :
Résolution approchée d'une équation du type $f(x)=k$ par balayage.
On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=x^3+x-3$.
On admet que cette fonction est continue et strictement croissante sur [1,2] et que l'équation $f(x)=0$ admet une unique solution a dans [1,2].

1) Que fait l'algorithme ci-contre ?
2) Quelle valeur de a affiche-t-il lorsque n = 1 ?

Variables :
  n est un entier naturel
  a est un nombre réel
Début de l'algorithme :
  Saisir n
  Affecter à a la valeur 1
  Tant que $a^3+a-3<0$
    | Affecter à a la valeur $a+10^{-n}$
  Fin du tant que
  Afficher a
Fin de l'algorithme

Exercice 29 :
Résolution approchée d'une équation du type $f(x)=k$ par dichotomie
On considère l'équation $f(x)=0$ avec $f(x)=x^3+3x^2+5x-1$ qui admet une unique solution *s* dans [0,1] et l'algorithme suivant :

1) Pour obtenir un encadrement de *s* à 10^{-2}, que doit-on saisir pour *a, b* et *e* ?
2) Compléter le tableau suivant

Numéro de passage	*a*	*b*	$b-a>0$	*m*	*Signe de* $f(a)f(m)$
1	*0*	*1*	*oui*	*0,5*	*négatif*
2					
3					

Variables :
  a,b,e,m sont des nombres réels
Début de l'algorithme :
  Saisir a et b les bornes de l'intervalle
  Saisir e l'amplitude de l'encadrement
  Tant que $b-a>0$
    | Affecter à m la valeur $\frac{a+b}{2}$
    | Si $f(a)\times f(m)>0$
    | | Affecter à a la valeur m
    | Sinon
    | | Affecter à b la valeur m
    | Fin du si
  Fin du tant que
  Afficher a,b
Fin de l'algorithme