EXPONENTIELLE

I. $\exp(0)=1$; calculs d'images

Exercice 1 : Soit *f* la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=(2-x)\mathrm{e}^{x}+1$.
Calculer les valeurs exactes de $f(0)$, $f(1)$, $f(-2)$, $f(-1)$ et $f(2)$.

Exercice 2 : Soit *f* la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=x^{2}\mathrm{e}^{x-1}-\dfrac{x^{2}}{2}$.

1) Calculer $f(1)$.
2) Reproduire et compléter à l'aide de la calculatrice le tableau suivant en indiquant les valeurs approchées sous la forme $n\times10^{-4}$ avec *n* entier.

x	$-0,20$	$-0,15$	$-0,10$	0	$0,10$	$0,15$	$0,20$
$f(x)$							

Exercice 3 : Soit *f* la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=(2x+1)\mathrm{e}^{-x}$.
Montrer que la courbe représentative de la fonction *f* passe par le point $A(0;1)$.

II. Écriture ; utilisation de $\mathrm{e}^{-x}=\dfrac{1}{\mathrm{e}^{x}}$; $\mathrm{e}^{2x}=\left(\mathrm{e}^{x}\right)^{2}$

Exercice 4 : Montrer que pour tout réel *x*, on a : $\dfrac{\mathrm{e}^{1-3x}}{1+\mathrm{e}^{-3x}}=\dfrac{\mathrm{e}}{1+\mathrm{e}^{3x}}$.

Exercice 5 : Vérifier que pour tout réel *x*, $\dfrac{\mathrm{e}^{2x}}{\left(\mathrm{e}^{x}+1\right)^{2}}=\dfrac{\mathrm{e}^{x}}{\mathrm{e}^{x}+1}-\dfrac{\mathrm{e}^{x}}{\left(\mathrm{e}^{x}+1\right)^{2}}$.

Exercice 6 : Soit *f* la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=\dfrac{1}{\mathrm{e}^{x}+\mathrm{e}^{-x}}$.

1) Calculer $f(0)$.
2) Exprimer $f(-x)$ à l'aide de $f(x)$; que peut-on en déduire ?
3) Démontrer que pour tout réel *x*, $f(x)=\dfrac{\mathrm{e}^{x}}{\left(\mathrm{e}^{x}\right)^{2}+1}$.

Exercice 7 : Soit *f* la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=x-1+\dfrac{2}{1+\mathrm{e}^{x}}$.
Montrer que, pour tout réel *x*, $f(x)+f(-x)=0$.

III. Résolution d'équations

Exercice 8 : Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

a) $e^x - 1 = 0$. b) $(x-1)e^x = 0$. c) $(x^2-5x+6)e^x = 0$.

d) $e^{-x}(1-x^2) = 0$. e) $\dfrac{e^{2x}-1}{e^{2x}+1} = 0$. f) $\dfrac{1}{1-e^{-x}} = 0$.

g) $x^2e^x + 3xe^x = 0$. *h) $e^{2x} - 3e^x - 4 = 0$ (*on posera* $X = e^x$).

IV. Étude de signes

Exercice 9 : Indiquer les propositions exactes :

L'expression	e^{-x}	$-e^{-x}$	$\dfrac{1}{e^x}$	$\dfrac{1}{e^{-x}}$	e^x+1	e^x-1
est toujours positive						
est toujours négative						
est négative si x est négatif						
est négative si x est positif						

Exercice 10 : Établir, suivant les valeurs de x, le signe des expressions suivantes :

a) $e^x - 1$. b) $(x-1)e^x$. c) $(x^2-5x+6)e^x$.

d) $e^{-x}(1-x^2)$. e) $\dfrac{e^{2x}-1}{e^{2x}+1}$. f) $\dfrac{1}{1-e^{-x}}$.

g) $x^2e^x + 3xe^x$. h) $-\dfrac{e^x}{(x+1)^2}$.

V. Dérivation

$$\mathbf{exp' = exp}$$

Exercice 11 : Dériver la fonction f définie par :

a) $f(x) = (x^2-5x+6)e^x$ sur $\mathbb{R}$. b) $f(x) = 2e^x - x - 2$ sur $\mathbb{R}$.

c) $f(x) = \dfrac{x}{3} - \dfrac{1}{e^x}$ sur $\mathbb{R}$. d) $f(x) = \dfrac{e^x}{x+1}$ sur $]-1;+\infty[$.

Exercice 12 : Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = e^x - x$.

a) Calculer $f'(x)$.
b) Dresser le tableau de variation de f.
c) Montrer que f ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$.

Exercice 13 : Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \dfrac{1}{e^x+1}$.

La tangente à la courbe représentative de la fonction f au point d'abscisse 0 est-elle parallèle à la droite d'équation $y = -\dfrac{1}{4}x$?

$(\mathrm{e}^u)' = u'\mathrm{e}^u$

Exercice 14 : Dériver la fonction *f* définie par :

a) $f(x) = \mathrm{e}^{-x}$ sur $\mathbb{R}$.

b) $f(x) = \mathrm{e}^{2x-5}$ sur $\mathbb{R}$.

c) $f(x) = x\mathrm{e}^{-2x}$ sur $\mathbb{R}$.

d) $f(x) = (x+2)\mathrm{e}^{3x}$ sur $\mathbb{R}$.

e) $f(x) = (x^2+2x-1)\mathrm{e}^{-x}+1$ sur $\mathbb{R}$.

f) $f(x) = \mathrm{e}^{\frac{1}{x}}$ sur $\mathbb{R}^*$.

g) $f(x) = \dfrac{1}{\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{-x}}$ sur $\mathbb{R}$.

h) $f(x) = \mathrm{e}^{x^2+3x+5}$ sur $\mathbb{R}$.

*Exercice 15 : Soit *f* la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = (ax^2+bx+c)\mathrm{e}^{-x}$.

Déterminer les réels *a*, *b* et *c* tels que pour tout réel *x*, $f'(x) = (x^2+4x+3)\mathrm{e}^{-x}$.

VI. Autour des limites

Exercice 16 : Déterminer les limites en $+\infty$ et en $-\infty$ de la fonction *f* définie par :

a) $f(x) = \mathrm{e}^x + x + 3$.

b) $f(x) = \mathrm{e}^{-x} + 2$.

c) $f(x) = 1 - \mathrm{e}^x$.

d) $f(x) = \dfrac{1}{1+\mathrm{e}^{-x}}$.

e) $f(x) = \mathrm{e}^{-2x^2}$.

Exercice 17 : Déterminer les limites en $+\infty$ et en $-\infty$ de la fonction *f* définie par :

a) $f(x) = (x^2+2x-1)\mathrm{e}^{-x}+1$.

b) $f(x) = 2\mathrm{e}^x - x - 2$.

Dans certains cas, on sera amené à citer une propriété du cours.

*Exercice 18 : Déterminer les limites en $+\infty$ et en $-\infty$ de la fonction *f* définie par :

a) $f(x) = \mathrm{e}^{2x} - (x+1)\mathrm{e}^x$ (*en* $+\infty$, *on pourra mettre* e^{2x} *en facteur*).

b) $f(x) = \dfrac{\mathrm{e}^x}{1+\mathrm{e}^x}$ (*en* $+\infty$, *multiplier numérateur et dénominateur par* e^{-x}).

Exercice 19 : Soit *f* la fonction définie par $f(x) = (2-x)\mathrm{e}^x$.

Justifier les affirmations données par le tableau de variations suivant :

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	2	$\nearrow$	e	$\searrow$	$-\infty$