EXPONENTIELLE

I. $\exp(0)=1$; calculs d'images *Corrigé*

Exercice 1 : $f(x)=(2-x)\mathrm{e}^{x}+1$.

$f(0)=\left(2-0\right)\mathrm{e}^{0}+1=2\times1+1=3$; $f(1)=\left(2-1\right)\mathrm{e}^{1}+1=\mathrm{e}+1=3$;

$f(-2)=\left[2-\left(-2\right)\right]\mathrm{e}^{-2}+1=4\mathrm{e}^{-2}+1=\dfrac{4}{\mathrm{e}^{2}}+1=\dfrac{4+\mathrm{e}^{2}}{\mathrm{e}^{2}}$;

$f(-1)=\left[2-\left(-1\right)\right]\mathrm{e}^{-1}+1=3\mathrm{e}^{-1}+1=\dfrac{3}{\mathrm{e}}+1=\dfrac{3+\mathrm{e}}{\mathrm{e}}$;

$f(2)=\left(2-2\right)\mathrm{e}^{2}+1=1$.

Exercice 2 : $f(x)=x^{2}\mathrm{e}^{x-1}-\dfrac{x^{2}}{2}$.

1) $f(1)=1^{2}\mathrm{e}^{1-1}-\dfrac{1^{2}}{2}=\mathrm{e}^{0}-\dfrac{1}{2}=1-\dfrac{1}{2}=\dfrac{1}{2}$.

2)

x	$-0,20$	$-0,15$	$-0,10$	0	$0,10$	$0,15$	$0,20$
$f(x)$	-80×10^{-4}	-41×10^{-4}	-17×10^{-4}	0	-9×10^{-4}	-16×10^{-4}	-20×10^{-4}

Exercice 3 : $f(x)=(2x+1)\mathrm{e}^{-x}$.

$f(x_A)=f(0)=\left(2\times0+1\right)\mathrm{e}^{-0}=1\mathrm{e}^{0}=1=y_A$;

donc la courbe représentative de la fonction *f* passe par le point $A\left(0;1\right)$.

II. Écriture ; utilisation de $\mathbf{e}^{-x}=\dfrac{1}{\mathbf{e}^{x}}$; $\mathbf{e}^{2x}=\left(\mathbf{e}^{x}\right)^{2}$ *Corrigé*

Exercice 4 :

Pour tout réel x, $\dfrac{\mathrm{e}^{1-3x}}{1+\mathrm{e}^{-3x}}=\dfrac{\mathrm{e}^{1}\times\mathrm{e}^{-3x}}{1+\dfrac{1}{\mathrm{e}^{3x}}}=\dfrac{\dfrac{\mathrm{e}}{\mathrm{e}^{3x}}}{\dfrac{\mathrm{e}^{3x}+1}{\mathrm{e}^{3x}}}=\dfrac{\mathrm{e}}{\mathrm{e}^{3x}}\times\dfrac{\mathrm{e}^{3x}}{\mathrm{e}^{3x}+1}=\dfrac{\mathrm{e}}{1+\mathrm{e}^{3x}}$.

(NB : On peut aussi raisonner par équivalences, à l'aide d'un produit en croix).

Exercice 5 :

Partons du membre de droite de l'égalité :

$$\frac{\mathrm{e}^{x}}{\mathrm{e}^{x}+1}-\frac{\mathrm{e}^{x}}{(\mathrm{e}^{x}+1)^2}=\frac{\mathrm{e}^{x}(\mathrm{e}^{x}+1)}{(\mathrm{e}^{x}+1)^2}-\frac{\mathrm{e}^{x}}{(\mathrm{e}^{x}+1)^2}=\frac{\mathrm{e}^{x}(\mathrm{e}^{x}+1)-\mathrm{e}^{x}}{(\mathrm{e}^{x}+1)^2}=\frac{\mathrm{e}^{2x}+\mathrm{e}^{x}-\mathrm{e}^{x}}{(\mathrm{e}^{x}+1)^2}=\frac{\mathrm{e}^{2x}}{(\mathrm{e}^{x}+1)^2}.$$

Exercice 6 : $f(x)=\dfrac{1}{\mathrm{e}^{x}+\mathrm{e}^{-x}}$.

1) $f(0)=\dfrac{1}{\mathrm{e}^{0}+\mathrm{e}^{-0}}=\dfrac{1}{1+1}=\dfrac{1}{2}$.

2) Pour tout réel x, $f(-x)=\dfrac{1}{\mathrm{e}^{-x}+\mathrm{e}^{x}}=f(x)$: la fonction *f* est donc paire, et dans un repère orthogonal, sa courbe représentative est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées.

3) Pour tout réel x, $f(x)=\dfrac{1}{e^x+e^{-x}}=\dfrac{1}{e^x+\dfrac{1}{e^x}}=\dfrac{1}{\dfrac{(e^x)^2+1}{e^x}}=\dfrac{e^x}{(e^x)^2+1}$.

Exercice 7 : $f(x)=x-1+\dfrac{2}{1+e^x}$.

Pour tout réel x, $f(x)+f(-x)=x-1+\dfrac{2}{1+e^x}-x-1+\dfrac{2}{1+e^{-x}}$

$$=-2+\frac{2}{1+e^x}+\frac{2}{1+\frac{1}{e^x}}$$

$$=\frac{-2\left(1+e^x\right)}{1+e^x}+\frac{2}{1+e^x}+\frac{2}{\frac{e^x+1}{e^x}}$$

$$=\frac{-2-2e^x}{1+e^x}+\frac{2}{1+e^x}+\frac{2e^x}{1+e^x}=0.$$

(NB : Ainsi, la fonction *f* est impaire, et sa courbe représentative est symétrique par rapport à l'origine du repère).

III. Résolution d'équations *Corrigé*

Exercice 9 : Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes

a) $e^x-1=0$

$e^x=1$
$e^x=e^0$
$x=0$

L'équation a une solution : 0.

b) $\left(x-1\right)e^x=0$.

On sait que , pour tout réel x, $e^x\neq 0$ donc
$\left(x-1\right)e^x=0$ équivaut à $x-1=0$ soit $x=1$.

L'équation a une solution : 1.

c) $\left(x^2-5x+6\right)e^x=0$.

On sait que , pour tout réel x, $e^x>0$ donc
$\left(x^2-5x+6\right)e^x=0$ équivaut à $x^2-5x+6=0$.

$x^2-5x+6=0$ $\quad \Delta=(-5)^2-4\times1\times6=1$

$x_1=\dfrac{5+1}{2}=3$ et $x_2=\dfrac{5-1}{2}=2$

L'équation a deux solutions : 3 et 2.

d) $e^{-x}\left(1-x^2\right)=0$.

Pour tout réel x , $e^{-x}\neq 0$ donc $e^{-x}\left(1-x^2\right)=0$ équivaut à $1-x^2=0$

$1-x^2=0$ si et seulement si $x=1$ ou $x=-1$.

L'équation a deux solutions : –1 et 1.

e) $\dfrac{e^{2x}-1}{e^{2x}+1}=0$.

Pour tout réel x, $e^{2x}+1\neq 0$ donc l'équation est définie sur $\mathbb{R}$ (aucune valeur de x n'annule le dénominateur).

$\dfrac{e^{2x}-1}{e^{2x}+1}=0$ équivaut à $e^{2x}-1=0$.

$e^{2x}-1=0$

$e^{2x}=1$

$e^{2x}=e^0$

$2x=0$

$x=0$

<u>L'équation a une solution : 0.</u>

f) $\dfrac{1}{1-e^{-x}}=0$.

L'équation $\dfrac{1}{1-e^{-x}}=0$ est définie si et seulement si $1-e^{-x}\neq 0$ c'est-à-dire ssi $e^{-x}\neq 1$ donc pour $x\neq 0$.

<u>L'équation</u> $\dfrac{1}{1-e^{-x}}=0$ **<u>n'a pas de solution</u>** car le numérateur ne peut pas être égal à 0.

g) $x^2e^x+3xe^x=0$.

On va factoriser : $x^2e^x+3xe^x=0$ équivaut à $xe^x(x+3)=0$.

Or pour tout réel x, $e^x\neq 0$ donc $xe^x(x+3)=0$ équivaut à $x=0$ ou $x=-3$.

<u>L'équation a deux solutions : 0 et –3</u>

*h) $e^{2x}-3e^x-4=0$ (*on posera* $X=e^x$).

En posant $X=e^x$ l'équation devient $X^2-3X-4=0$

$X^2-3X-4=0$ $\quad\Delta=(-3)^2-4\times1\times(-4)=9+16=25$.

$X_1=\dfrac{3+5}{2}=4$ ou $X_2=\dfrac{3-5}{2}=-1$.

Or $X=e^x$ donc on obtient

$e^x=4$ ou $e^x=-1$.

Or on sait que, pour tout réel x, $e^x>0$ donc $e^x=-1$ n'a pas de solution.

$e^x=4$ équivaut à $x=\ln 4$.

<u>L'équation a une solution : ln 4.</u>

IV. Étude de signes *Corrigé*

<u>Exercice 10</u> : Indiquer les propositions exactes :

L'expression	e^{-x}	$-e^{-x}$	$\dfrac{1}{e^x}$	$\dfrac{1}{e^{-x}}$	e^x+1	e^x-1
est toujours positive	×		×	×	×	
est toujours négative		×				
est négative si x est négatif		×				×
est négative si x est positif		×				

Exercice 11 :

a) $A(x)=\mathrm{e}^x-1$: $A(x)=0 \Leftrightarrow \mathrm{e}^x=1 \Leftrightarrow \mathrm{e}^x=\mathrm{e}^0 \Leftrightarrow x=0$ et $A(x)>0 \Leftrightarrow \mathrm{e}^x>\mathrm{e}^0 \Leftrightarrow x>0$. Donc :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$A(x)$		$-$	0	$+$	

b) $B(x)=(x-1)\mathrm{e}^x$: $B(x)$ est du signe de $(x-1)$ car $\mathrm{e}^x>0$. Donc :

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$B(x)$		$-$	0	$+$	

c) $C(x)=(x^2-5x+6)\mathrm{e}^x$: $C(x)$ est du signe de (x^2-5x+6) (trinôme du second degré), car $\mathrm{e}^x>0$;
x^2-5x+6 a pour racines 2 et 3 et le coefficient de x^2 est $1>0$. Donc :

x	$-\infty$		2		3		$+\infty$
$C(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

d) $D(x)=\mathrm{e}^{-x}(1-x^2)$: $D(x)$ est du signe de $(1-x^2)$ (trinôme du second degré), car $\mathrm{e}^{-x}>0$.
$1-x^2$ a pour racines -1 et 1 et le coefficient de x^2 est $-1<0$. Donc :

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$D(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

e) $E(x)=\dfrac{\mathrm{e}^{2x}-1}{\mathrm{e}^{2x}+1}$: $E(x)$ est du signe de $(\mathrm{e}^{2x}-1)$, car $(\mathrm{e}^{2x}+1)>0$.
$\mathrm{e}^{2x}-1=0 \Leftrightarrow \mathrm{e}^{2x}=1 \Leftrightarrow \mathrm{e}^{2x}=\mathrm{e}^0 \Leftrightarrow 2x=0 \Leftrightarrow x=0$ et $\mathrm{e}^{2x}-1>0 \Leftrightarrow \mathrm{e}^{2x}>\mathrm{e}^0 \Leftrightarrow 2x>0 \Leftrightarrow x>0$. Donc :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$E(x)$		$-$	0	$+$	

f) $F(x)=\dfrac{1}{1-\mathrm{e}^{-x}}$: $F(x)$ est du signe de $(1-\mathrm{e}^{-x})$;
$1-\mathrm{e}^{-x}=0 \Leftrightarrow 1=\mathrm{e}^{-x} \Leftrightarrow \mathrm{e}^0=\mathrm{e}^{-x} \Leftrightarrow 0=-x \Leftrightarrow x=0$ et $1-\mathrm{e}^{-x}>0 \Leftrightarrow 1>\mathrm{e}^{-x} \Leftrightarrow 0>-x \Leftrightarrow x>0$.
Mais $(1-\mathrm{e}^{-x})$ ne doit pas être nul, donc $x\neq 0$. Donc :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$F(x)$		$-$	$\|\|$	$+$	

g) $G(x)=x^2\mathrm{e}^x+3x\mathrm{e}^x$: $G(x)=\mathrm{e}^x(x^2+3x)=\mathrm{e}^x[x(x+3)]$.
$G(x)$ est du signe de $[x(x+3)]$ (trinôme du second degré), car $\mathrm{e}^x>0$;
$x(x+3)$ a pour racines -3 et 0 et le coefficient de x^2 est $1>0$. Donc :

x	$-\infty$		-3		0		$+\infty$
$G(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

h) $H\left(x\right)=\dfrac{-\mathrm{e}^x}{\left(x+1\right)^2}$: $\mathrm{e}^x>0$ donc $-\mathrm{e}^x<0$ et $\left(x+1\right)^2>0$ pour $x\neq -1$. Donc :

x	$-\infty$	-1	$+\infty$
$H(x)$	$-$	$\vert\vert$	$-$

V. Dérivation *Corrigé*

$$\mathbf{exp}' = \mathbf{exp}$$

Exercice 12 : Dériver la fonction f définie par :

a) $f(x)=\left(x^2-5x+6\right)\mathrm{e}^x$

On sait que $(uv)'=u'v+uv'$. Ici, $u(x)=x^2-5x+6$ et $v(x)=\mathrm{e}^x$.

D'où : $u'(x)=2x-5$ et $v'(x)=\mathrm{e}^x$.

On en déduit $f'(x)=u'(x)v(x)+u(x)v'(x)$

$$\begin{aligned} &= (2x-5)\mathrm{e}^x+(x^2-5x+6)\mathrm{e}^x \\ &= (2x-5+x^2-5x+6)\mathrm{e}^x \\ &= (x^2-3x+1)\mathrm{e}^x. \end{aligned}$$

b) $f(x)=2\mathrm{e}^x-x-2$

$f'(x)=2\mathrm{e}^x-1$

c) $f(x)=\dfrac{x}{3}-\dfrac{1}{\mathrm{e}^x}$.

On sait que la dérivée de $\dfrac{1}{u}$ est $-\dfrac{u'}{u^2}$. La dérivée de $\dfrac{1}{\mathrm{e}^x}$ est donc $-\dfrac{\mathrm{e}^x}{(\mathrm{e}^x)^2}$, c'est-à-dire $-\dfrac{1}{\mathrm{e}^x}$.

Si l'on a oublié la dérivée de $\dfrac{1}{u}$, on peut utiliser la dérivée de $\dfrac{u}{v}$ avec $u(x)=1$ et $v(x)=\mathrm{e}^x$.

On peut aussi remarquer que $\dfrac{1}{\mathrm{e}^x}=\mathrm{e}^{-x}$. La dérivée est donc égale à $-\mathrm{e}^{-x}$ (car $\left(\mathrm{e}^u\right)'=u'\mathrm{e}^u$), c'est-à-dire $-\dfrac{1}{\mathrm{e}^x}$.

Cela fait trois méthodes pour dériver $\dfrac{1}{\mathrm{e}^x}$! Il faut bien sûr n'en utiliser qu'une !

On a donc : $f'(x)=\dfrac{1}{3}-\left(-\dfrac{1}{\mathrm{e}^x}\right)=\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{\mathrm{e}^x}$.

d) $f(x)=\dfrac{\mathrm{e}^x}{x+1}$.

On a ici un quotient $\dfrac{u}{v}$ avec $u(x)=\mathrm{e}^x$ et $v(x)=x+1$. $u'(x)=\mathrm{e}^x$ et $v'(x)=1$.

On sait que $\left(\dfrac{u}{v}\right)'=\dfrac{u'v-uv'}{v^2}$. D'où, pour $x>-1$: $f'(x)=\dfrac{\mathrm{e}^x(x+1)-\mathrm{e}^x\times 1}{(x+1)^2}=\dfrac{x\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^x}{(x+1)^2}=\dfrac{x\mathrm{e}^x}{(x+1)^2}$.

Exercice 13 : $f(x)=\mathrm{e}^x-x$

a) Pour tout réel x, $f'(x)=\mathrm{e}^x-1$.

b) $f'(x) > 0$ si et seulement si $\mathrm{e}^x > 1$, c'est-à-dire ssi $\mathrm{e}^x > \mathrm{e}^0$, ce qui fait $x > 0$.
De même, $f'(x) < 0$ si et seulement si $x < 0$, et $f'(x) = 0$ si et seulement si $x = 0$.

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$		$\searrow$	1	$\nearrow$	

Le minimum de *f* est $f(0)$. $f(0) = \mathrm{e}^0 - 0 = 1 - 0 = 1$.
Pour tout réel *x*, $f(x)$ est supérieur ou égal au minimum de *f*.
Pour tout réel *x*, $f(x)$? 1. La fonction *f* ne s'annule donc pas sur **R**.

Exercice 14 : $f(x) = \dfrac{1}{\mathrm{e}^x + 1}$

Le coefficient directeur de la tangente à la courbe de *f* en son point d'abscisse 0 est $f'(0)$.
Or, pour tout réel *x* :

$$f'(x) = -\frac{\mathrm{e}^x}{(\mathrm{e}^x+1)^2} \left(\text{en utilisant la formule } \left(\frac{1}{u}\right)' = -\frac{u'}{u^2}\right). \text{ D'où } f'(0) = -\frac{\mathrm{e}^0}{(\mathrm{e}^0+1)^2} = -\frac{1}{(1+1)^2} = -\frac{1}{4}.$$

On trouve le même coefficient directeur que celui de la droite d'équation $y = -\dfrac{1}{4}x$.
Cette droite et la tangente au point d'abscisse 0 sont donc parallèles (même coefficient directeur).

$$\boldsymbol{(\mathrm{e}^u)' = u'\mathrm{e}^u}$$

Exercice 15 : Dériver la fonction *f* définie par :

a) $f(x) = \mathrm{e}^{-x}$ sur $\mathbb{R}$.
Ici $u(x) = -x$ donc $u'(x) = -1$ et donc $f'(x) = u'(x)\mathrm{e}^{u(x)} = -\mathrm{e}^{-x}$.

b) $f(x) = \mathrm{e}^{2x-5}$ sur $\mathbb{R}$.
On pose $u(x) = 2x - 5$, $u'(x) = 2$. $f(x) = \mathrm{e}^{u(x)}$ donc $f'(x) = u'(x)\mathrm{e}^{u(x)} = 2\mathrm{e}^{2x-5}$.

c) $f(x) = x\mathrm{e}^{-2x}$ sur $\mathbb{R}$.
f est un produit de fonctions $u(x) = x$ et $v(x) = \mathrm{e}^{-2x}$.
On utilise la formule $(uv)' = u'v + uv'$. $u'(x) = 1$ et $v'(x) = -2\mathrm{e}^{-2x}$.
On obtient $f'(x) = 1 \times \mathrm{e}^{-2x} + x \times \left(-2\mathrm{e}^{-2x}\right) = \mathrm{e}^{-2x}(1-2x)$.

d) $f(x) = (x+2)\mathrm{e}^{3x}$ sur $\mathbb{R}$.
f est un produit de fonctions : $u(x) = x + 2$ et $v(x) = \mathrm{e}^{3x}$.
On utilise la formule $(uv)' = u'v + uv'$. $u'(x) = 1$ et $v'(x) = 3\mathrm{e}^{3x}$.
On obtient $f'(x) = 1 \times \mathrm{e}^{3x} + (x+2) \times 3\mathrm{e}^{3x}$. On factorise e^{3x}.
$f'(x) = (1 + x + 2)\mathrm{e}^{3x} = (x+3)\mathrm{e}^{3x}$.

e) $f(x) = \left(x^2 + 2x - 1\right)\mathrm{e}^{-x} + 1$ sur $\mathbb{R}$.
On pose $u(x) = x^2 + 2x - 1$ et $v(x) = \mathrm{e}^{-x}$. $u'(x) = 2x + 2$ et $v'(x) = -\mathrm{e}^{-x}$
$f'(x) = (2x+2)\mathrm{e}^{-x} + \left(x^2 + 2x - 1\right) \times \left(-\mathrm{e}^{-x}\right) = \left(2x + 2 - x^2 - x + 1\right)\mathrm{e}^{-x} = \left(-x^2 + x + 3\right)\mathrm{e}^{-x}$.

f) $f(x) = \mathrm{e}^{\frac{1}{x}}$ sur $\mathbb{R}^*$.

$u(x)=\frac{1}{x}$ et $u'(x)=-\frac{1}{x^2}$. $f(x)=\mathrm{e}^{u(x)}$ donc $f'(x)=u'(x)\mathrm{e}^{u(x)}=-\frac{1}{x^2}\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}$.

g) $f(x)=\frac{1}{\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{-x}}$ sur $\mathbb{R}$.

$f(x)=\frac{1}{u(x)}$ avec $u(x)=\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{-x}$. $u'(x)=\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^{-x}$. On utilise la formule $\left(\frac{1}{u}\right)'=\frac{-u'}{u^2}$.

$f'(x)=\frac{-\left(\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^{-x}\right)}{\left(\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^{-x}\right)^2}=\frac{-\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{-x}}{\left(\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^{-x}\right)^2}$.

h) $f(x)=\mathrm{e}^{x^2+3x+5}$ sur $\mathbb{R}$.

$f(x)=\mathrm{e}^{u(x)}$ avec $u(x)=x^2+3x+5$. $u'(x)=2x+3$ et $f'(x)=(2x+3)\mathrm{e}^{x^2+3x+5}$.

*Exercice 16 :

$f(x)=(ax^2+bx+c)\mathrm{e}^{-x}$

On sait que $(uv)'=u'v+uv'$. Ici, $u(x)=ax^2+bx+c$ et $v(x)=\mathrm{e}^{-x}$.

D'où : $u'(x)=2ax+b$ et $v'(x)=-\mathrm{e}^{-x}$.

On en déduit $f'(x)=u'(x)v(x)+u(x)v'(x)$

$$\begin{aligned}&=(2ax+b)\mathrm{e}^{-x}-(ax^2+bx+c)\mathrm{e}^{-x}\\&=(2ax+b-ax^2-bx-c)\mathrm{e}^{-x}\\&=\left[-ax^2+(2a-b)x+b-c\right]\mathrm{e}^{-x}\end{aligned}$$

On a : pour tout réel x, $f'(x)=(x^2+4x+3)\mathrm{e}^{-x}$ si et seulement si :

pour tout réel x, $-ax^2+(2a-b)x+b-c=x^2+4x+3$, c'est-à-dire si et seulement si les coefficients des monômes de même degré sont égaux, ce qui fait :

$\begin{cases}-a=1\\2a-b=4\\b-c=3\end{cases}$. Cela donne $\begin{cases}a=-1\\-2-b=4\\b-c=3\end{cases}$, $\begin{cases}a=-1\\b=-6\\c=b-3=-9\end{cases}$. $\boxed{a=-1\ \ b=-6 \text{ et } c=-9.}$

VI. Autour des limites	*Corrigé*

Exercice 16 : **On utilise les limites suivantes :** $\lim\limits_{x\to+\infty}\mathrm{e}^x=+\infty$ **et** $\lim\limits_{x\to-\infty}\mathrm{e}^x=0$.

a) $f(x)=\mathrm{e}^x+x+3$.

- $\lim\limits_{x\to+\infty}\mathrm{e}^x=+\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}(x+3)=+\infty$ donc, par somme, $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$.
- $\lim\limits_{x\to-\infty}\mathrm{e}^x=0$ et $\lim\limits_{x\to-\infty}(x+3)=-\infty$ donc, par somme, $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=-\infty$.

b) $f(x)=\mathrm{e}^{-x}+2$.

- $\lim\limits_{x\to+\infty}(-x)=-\infty$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty}\mathrm{e}^{-x}=0$; d'où $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=2$.
- $\lim\limits_{x\to-\infty}(-x)=+\infty$ donc $\lim\limits_{x\to-\infty}\mathrm{e}^{-x}=+\infty$; d'où $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=+\infty$.

c) $f(x)=1-\mathrm{e}^x$.

- $\lim\limits_{x\to+\infty}\mathrm{e}^x=+\infty$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(-\mathrm{e}^x\right)=-\infty$; d'où $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=-\infty$.

- $\lim\limits_{x\to-\infty} \mathrm{e}^x = 0$ donc $\lim\limits_{x\to-\infty} \left(-\mathrm{e}^x\right) = 0$; d'où $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 1$.

d) $f(x) = \dfrac{1}{1+\mathrm{e}^{-x}}$.

- $\lim\limits_{x\to+\infty} (-x) = -\infty$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty} \mathrm{e}^{-x} = 0$ puis $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(1+\mathrm{e}^{-x}\right) = 1$; d'où $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 1$.
- $\lim\limits_{x\to-\infty} (-x) = +\infty$ donc $\lim\limits_{x\to-\infty} \mathrm{e}^{-x} = +\infty$ puis $\lim\limits_{x\to-\infty} \left(1+\mathrm{e}^{-x}\right) = +\infty$; d'où $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 0$.

e) $f(x) = \mathrm{e}^{\frac{1}{x}}$.

- $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(\dfrac{1}{x}\right) = 0$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \mathrm{e}^0 = 1$.
- $\lim\limits_{x\to-\infty} \left(\dfrac{1}{x}\right) = 0$ donc $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \mathrm{e}^0 = 1$.

Exercice 17 :

On peut utiliser la propriété : « en l'infini, l'exponentielle l'emporte sur toute fonction puissance, donc sur tout polynôme », mais cette propriété n'est valable qu'en cas d'indétermination.

a) $f(x) = \left(x^2+2x-1\right)\mathrm{e}^{-x} + 1$.

- $\lim\limits_{x\to+\infty} (-x) = -\infty$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty} \mathrm{e}^{-x} = 0$; d'autre part, $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(x^2+2x-1\right) = \lim\limits_{x\to+\infty} x^2 = +\infty$.

  Donc $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(x^2+2x-1\right)\mathrm{e}^{-x}$ est une forme indéterminée du type $"\infty\times 0"$.

  Mais on sait que, en l'infini, l'exponentielle l'emporte sur toute fonction puissance, donc sur tout polynôme.

  On peut donc écrire : $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(x^2+2x-1\right)\mathrm{e}^{-x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \mathrm{e}^{-x} = 0$; d'où $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 1$.
- $\lim\limits_{x\to-\infty} (-x) = +\infty$ donc $\lim\limits_{x\to-\infty} \mathrm{e}^{-x} = +\infty$; d'autre part, $\lim\limits_{x\to-\infty} \left(x^2+2x-1\right) = \lim\limits_{x\to-\infty} x^2 = +\infty$.

  Donc $\lim\limits_{x\to-\infty} \left(x^2+2x-1\right)\mathrm{e}^{-x} = +\infty$; d'où $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$.

b) $f(x) = 2\mathrm{e}^x - x - 2$.

- $\lim\limits_{x\to+\infty} 2\mathrm{e}^x = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} (-x-2) = -\infty$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty} (2\mathrm{e}^x - x - 2)$ est une forme indéterminée du type $"+\infty-\infty"$.

  Mais on sait que, en l'infini, l'exponentielle l'emporte sur toute fonction puissance, donc sur tout polynôme.

  On peut donc écrire : $\lim\limits_{x\to+\infty} (2\mathrm{e}^x - x - 2) = \lim\limits_{x\to+\infty} 2\mathrm{e}^x = +\infty$; $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.
- $\lim\limits_{x\to-\infty} 2\mathrm{e}^x = 0$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} (-x-2) = +\infty$ donc $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$.

*Exercice 18 :

a) $f(x) = \mathrm{e}^{2x} - (x+1)\mathrm{e}^x$.

- $\lim\limits_{x\to+\infty} (2x) = +\infty$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty} \mathrm{e}^{2x} = +\infty$;

  d'autre part, $\lim\limits_{x\to+\infty} (x+1) = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \mathrm{e}^x = +\infty$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty} (x+1)\mathrm{e}^x = +\infty$;

  donc $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(\mathrm{e}^{2x} - (x+1)\mathrm{e}^x\right)$ est une forme indéterminée du type $"+\infty-\infty"$.

  On écrit, pour tout réel x, $f(x) = \mathrm{e}^{2x}\left[1 - \dfrac{(x+1)\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^{2x}}\right] = \mathrm{e}^{2x}\left(1 - \dfrac{x+1}{\mathrm{e}^x}\right)$.

$\lim\limits_{x\to+\infty}(x+1)=+\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}\mathrm{e}^x=+\infty$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x+1}{\mathrm{e}^x}$ est une forme indéterminée du type "$\dfrac{\infty}{\infty}$".

Mais on sait que, en l'infini, l'exponentielle l'emporte sur toute fonction puissance, donc sur tout polynôme.

On peut donc écrire : $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x+1}{\mathrm{e}^x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{\mathrm{e}^x}=0$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1-\dfrac{x+1}{\mathrm{e}^x}\right)=1$.

Avec $\lim\limits_{x\to+\infty}\mathrm{e}^{2x}=+\infty$, on en déduit $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$.

- $\lim\limits_{x\to-\infty}(2x)=-\infty$ donc $\lim\limits_{x\to-\infty}\mathrm{e}^{2x}=0$;

  d'autre part, $\lim\limits_{x\to-\infty}(x+1)=-\infty$ et $\lim\limits_{x\to-\infty}\mathrm{e}^x=0$ donc $\lim\limits_{x\to-\infty}(x+1)\mathrm{e}^x$ est une forme indéterminée du type "$\infty\times0$".

  Mais on sait que, en l'infini, l'exponentielle l'emporte sur toute fonction puissance, donc sur tout polynôme.

  On peut donc écrire : $\lim\limits_{x\to-\infty}(x+1)\mathrm{e}^x=\lim\limits_{x\to-\infty}\mathrm{e}^x=0$; finalement, $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=0$.

b) $f(x)=\dfrac{\mathrm{e}^{1-3x}}{1+\mathrm{e}^{-3x}}$.

- $\lim\limits_{x\to+\infty}(1-3x)=-\infty$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty}\mathrm{e}^{1-3x}=0$;

  d'autre part, $\lim\limits_{x\to+\infty}(-3x)=-\infty$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty}\mathrm{e}^{-3x}=0$ puis $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\mathrm{e}^{-3x}\right)=1$. D'où $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=0$.

- $\lim\limits_{x\to-\infty}(1-3x)=+\infty$ donc $\lim\limits_{x\to-\infty}\mathrm{e}^{1-3x}=+\infty$;

  d'autre part, $\lim\limits_{x\to-\infty}(-3x)=+\infty$ donc $\lim\limits_{x\to-\infty}\mathrm{e}^{-3x}=+\infty$ puis $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(1+\mathrm{e}^{-3x}\right)=+\infty$;

  donc $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\mathrm{e}^{1-3x}}{1+\mathrm{e}^{-3x}}$ est une forme indéterminée du type "$\dfrac{\infty}{\infty}$".

  On écrit, pour tout réel x, $f(x)=\dfrac{\mathrm{e}^{1-3x}\times\mathrm{e}^{3x}}{\left(1+\mathrm{e}^{-3x}\right)\times\mathrm{e}^{3x}}=\dfrac{\mathrm{e}^{1-3x+3x}}{\mathrm{e}^{3x}+\mathrm{e}^{-3x+3x}}=\dfrac{\mathrm{e}^1}{\mathrm{e}^{3x}+\mathrm{e}^0}=\dfrac{\mathrm{e}}{\mathrm{e}^{3x}+1}$.

  On a alors : $\lim\limits_{x\to-\infty}(3x)=-\infty$ donc $\lim\limits_{x\to-\infty}\mathrm{e}^{3x}=0$ puis $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(1+\mathrm{e}^{3x}\right)=1$. D'où $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=\dfrac{\mathrm{e}}{1}=\mathrm{e}$.

Exercice 19 : Soit *f* la fonction définie par $f(x)=(2-x)\mathrm{e}^x$.

Calculons la dérivée de *f*. *f* est dérivable sur $\mathbb{R}$, donc sur $[0;+\infty[$, comme produit de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$ et $f'(x)=-\mathrm{e}^x+(2-x)\mathrm{e}^x=(-1+2-x)\mathrm{e}^x=(1-x)\mathrm{e}^x$.

Pour tout réel x, $\mathrm{e}^x>0$, donc $f'(x)$ a le même signe que $1-x$; or $1-x$ est nul pour $x=1$, strictement positif pour $x<1$ et strictement négatif pour $x>1$, ce qui justifie les deux premières lignes du tableau.
La troisième ligne est justifiée par le fait qu'une fonction de dérivée positive sur un intervalle est croissante sur cet intervalle (c'est le cas ici sur l'intervalle $[0;1]$) et une fonction de dérivée négative sur un intervalle est décroissante sur cet intervalle (c'est le cas ici sur l'intervalle $[1;+\infty[$). On complète cette troisième ligne en calculant $f(0)$, $f(1)$ et en déterminant $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$:

$f(0)=(2-0)\mathrm{e}^0=2\times1=2$; $f(1)=(2-1)\mathrm{e}^1=1\times\mathrm{e}^1=\mathrm{e}$;

$\lim\limits_{x\to+\infty}(2-x)=-\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}\mathrm{e}^x=+\infty$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=-\infty$.

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	2	$\nearrow$	e	$\searrow$	$-\infty$