I) Résoudre algébriquement des équations, des inéquations

Pour les exercices suivants, on utilisera le cercle trigonométrique

Exercice 1

Résoudre dans l'intervalle $[0\,;2\pi]$ l'équation $\cos x = -\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

Exercice 2

Résoudre dans l'intervalle $[0\,;2\pi]$ l'équation $\sin x = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

Exercice 3

Résoudre dans l'intervalle $]-\pi\,;\,\pi]$ l'équation $\cos x = \dfrac{1}{2}$.

Exercice 4

Résoudre dans l'intervalle $]-\pi\,;\,\pi]$ l'équation $\sin x = -\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

Exercice 5

Résoudre dans l'intervalle $]-\pi\,;\,\pi]$ l'inéquation $\cos x > \dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

Exercice 6

Résoudre dans l'intervalle $]-\pi\,;\,\pi]$ l'inéquation $\sin x \leq \dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

Exercice 7

Résoudre dans l'intervalle $[0\,;2\pi]$ l'inéquation $\sin x < \dfrac{1}{2}$.

Exercice 8

Résoudre dans l'intervalle $[0\,;2\pi]$ l'inéquation $\cos x > 0$.

II) Résoudre graphiquement des équations

Exercice 9

On a tracé sur l'intervalle $[0\,;2\pi]$ la représentation graphique de la fonction cosinus.

Résoudre graphiquement dans l'intervalle $[0\,;2\pi]$ l'équation $\cos x = \dfrac{1}{2}$.

Exercice 10

On a tracé sur l'intervalle $]-\pi\,;\,\pi]$ la représentation graphique de la fonction sinus.

Résoudre graphiquement dans l'intervalle $]-\pi\,;\,\pi]$ l'équation $\sin x = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

III) Etudier le signe d'une expression

Exercice 11

On considère la fonction définie sur $[0\ ;\ 2\pi[$ par $f(x)=2\sin x+1$.

a) Résoudre, en utilisant le cercle trigonométrique, l'inéquation $\sin x>-\dfrac{1}{2}$ sur l'intervalle $[0\ ;\ 2\pi[$.

b) En déduire le signe de $f(x)$ sur $[0\ ;\ 2\pi[$.

Exercice 12

On considère la fonction définie sur $]-\pi\ ;\ \pi]$ par $f(x)=2\cos x-\sqrt{3}$.

a) Résoudre, en utilisant le cercle trigonométrique, l'inéquation $\cos x>\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ sur l'intervalle $]-\pi\ ;\ \pi]$.

b) En déduire le signe de $f(x)$ sur $]-\pi\ ;\ \pi]$.

Exercice 13

On considère la fonction définie sur $]-\pi\ ;\ \pi]$ par $f(x)=\cos\left(2x+\dfrac{\pi}{3}\right)$.

a) Résoudre dans $]-\pi\ ;\ \pi]$ l'équation $\cos\left(2x+\dfrac{\pi}{3}\right)=0$, puis l'inéquation $\cos\left(2x+\dfrac{\pi}{3}\right)>0$.

b) En déduire le signe de $f(x)$ sur $]-\pi\ ;\ \pi]$.

IV) Utiliser la parité et la périodicité des fonctions sinus et cosinus

Exercice 14

On considère la fonction *f* définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=x\sin x$. Démontrer que *f* est paire.

Exercice 15

On considère la fonction *f* définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=x+\sin x$. Démontrer que *f* est impaire.

Exercice 16

On considère la fonction *f* définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=\sin 2x$. Démontrer que *f* est périodique de période π.

Exercice 17

On considère la fonction *f* définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=\cos\left(\dfrac{x}{3}+\dfrac{\pi}{4}\right)$. Démontrer que *f* est périodique de période 6π.

V) Etudier des limites

Exercice 18

Etudier la limite en 0 de la fonction f définie sur $\mathbb{R}^*$ par $f(x)=\dfrac{3\sin x}{x}$.

Exercice 19

Etudier la limite en 0 de la fonction f définie sur $\mathbb{R}^*$ par $f(x)=\dfrac{\cos x-1}{2x}$.

Exercice 20

Etudier la limite en $+\infty$ de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=\sin x-x$.

Exercice 21

Etudier la limite en $-\infty$ de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=\cos 2x+x$.

VI) Calculer des dérivées

Exercice 22

On considère la fonction définie sur □ par $f(x)=x\sin x$. Calculer $f'(x)$.

Exercice 23

On considère la fonction définie sur □* par $f(x)=\dfrac{\cos x}{x}$. Calculer $f'(x)$.

Exercice 24

On considère la fonction définie sur □ par $f(x)=\sin(2x)$. Calculer $f'(x)$.

Exercice 25

On considère la fonction définie sur □ par $f(x)=\cos\left(\dfrac{x}{2}+\dfrac{\pi}{3}\right)$. Calculer $f'(x)$.

VII) Etude d'une fonction

Exercice 26

Soit f la fonction dérivable sur $[0;\pi]$, définie par $f(x)=-\dfrac{1}{2}\cos(2x)+\cos(x)+\dfrac{3}{2}$.

Vérifier que $f'(x)=\sin(x)[2\cos(x)-1]$ et en déduire le signe de $f'(x)$ sur $[0;\pi]$.

Dresser le tableau de variation de f sur $[0;\pi]$

VIII) Pour aller plus loin….Etude de la fonction tangente

Exercice 27

1) Définition

La fonction tangente, notée tan, est la fonction définie pour tout réel x différent de $-\frac{\pi}{2}+k\pi$, avec k entier, par $\tan x=\frac{\sin x}{\cos x}$.

2) Valeurs particulières à connaître :

Compléter le tableau suivant

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	π
tan$x$					

3) Propriétés

a) Montrer que, pour tout réel x différent de $-\frac{\pi}{2}+k\pi$, avec k entier, $\tan(x+\pi)=\tan x$.

La fonction tangente est donc périodique de période π.

b) Montrer que, pour tout réel x différent de $-\frac{\pi}{2}+k\pi$, avec k entier, $\tan(-x)=-\tan x$.

La fonction tangente est donc impaire.

On peut alors réduire l'intervalle d'étude de la fonction tangente à l'intervalle $\left[0\ ;\frac{\pi}{2}\right[$.

4) Etude de la fonction tangente

a) Montrer que : $\lim\limits_{\substack{x\to\frac{\pi}{2}\\ x<\frac{\pi}{2}}}\tan x=+\infty$.

La droite d'équation $x=\frac{\pi}{2}$ est donc asymptote à la courbe représentant la fonction tangente.

b) La fonction tangente est dérivable sur $\left[0\ ;\frac{\pi}{2}\right[$ (quotient de deux fonctions dérivables sur $\left[0\ ;\frac{\pi}{2}\right[$, le dénominateur ne s'annulant pas sur $\left[0\ ;\frac{\pi}{2}\right[$).

Montrer que, pour tout x de $\left[0\ ;\frac{\pi}{2}\right[$, $\tan'(x)=\frac{1}{\cos^2 x}=1+\tan^2 x$.

En déduire le sens de variation de la fonction tangente sur $\left[0\ ;\frac{\pi}{2}\right[$.

c) Tracer la courbe représentative de la fonction tangente sur $[-2\pi\ ;2\pi]$.