GÉOMÉTRIE DANS L'ESPACE

On se place dans un repère orthonormal du plan $\left(O\,;\vec{i},\,\vec{j},\vec{k}\right)$.

I. Équation de plan *Corrigé*

Exercice 1 : On considère le point $A(0;1;4)$ et le vecteur $\vec{n}(2;3;-1)$.

Déterminons une équation du plan (*P*) qui passe par *A* et qui admet $\vec{n}$ comme vecteur normal.

$$\begin{aligned} M(x;y;z) \in (P) &\Leftrightarrow \overrightarrow{AM}.\vec{n} = 0 \\ &\Leftrightarrow 2x+3(y-1)-(z-4)=0 \\ &\Leftrightarrow 2x+3y-z+1=0 \end{aligned}$$

$\boxed{2x+3y-z+1=0 \text{ est une équation du plan } (P).}$

Exercice 2 : On considère les points $A(1;1;0)$, $B(1;2;1)$ et $C(3;-1;2)$.

a) $\overrightarrow{AB}(0;1;1)$ et $\overrightarrow{AC}(2;-2;2)$.

Les coordonnées de $\overrightarrow{AB}$ et de $\overrightarrow{AC}$ ne sont pas proportionnelles donc les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ ne sont pas colinéaires. Les points *A* , *B* et *C* ne sont donc pas alignés.

b) Les points *A* , *B* et *C* ne sont pas alignés donc ils définissent un plan. Il suffit donc de montrer que les coordonnées des points *A* , *B* et *C* vérifient l'équation donnée.

$2x_A + y_A - z_A - 3 = 2+1-0-3 = 3-3 = 0$;

$2x_B + y_B - z_B - 3 = 2+2-1-3 = 4-4 = 0$;

$2x_C + y_C - z_C - 3 = 6-1-2-3 = 6-6 = 0$.

$\boxed{2x+y-z-3=0 \text{ est donc bien une équation du plan } (ABC).}$

Exercice 3 : On considère les points $A(2\,;1\,;3)$, $B(-3\,;-1;7)$ et $C(3;2;4)$ et le vecteur $\vec{n}(2;-3;1)$.

a) $\overrightarrow{AB}(-5\,;-2;4)$ et $\vec{n}.\overrightarrow{AB} = -10+6+4 = 0$ donc $\vec{n} \perp \overrightarrow{AB}$

$\overrightarrow{AC}(1;1;1)$ et $\vec{n}.\overrightarrow{AC} = 2-3+1 = 0$ donc $\vec{n} \perp \overrightarrow{AC}$.

et $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ ne sont pas colinéaires .

$\vec{n}$ est orthogonal à deux vecteurs non colinéaires du plan (*ABC*) donc $\boxed{\vec{n} \text{ est normal au plan } (ABC)}$.

b)
$$\begin{aligned} M(x;y;z) \in (P) &\Leftrightarrow \overrightarrow{AM}.\vec{n} = 0 \\ &\Leftrightarrow 2(x-2)-3(y-1)+(z-3)=0 \\ &\Leftrightarrow 2x-3y+z-4=0. \end{aligned}$$

$\boxed{2x-3y+z-4=0 \text{ est une équation du plan } (ABC).}$

Exercice 4 :

Le plan médiateur du segment $[AB]$ passe par le milieu *I* de $[AB]$ et admet pour vecteur normal le vecteur $\overrightarrow{AB}$.

Coordonnées de *I* :

$x_I = \dfrac{-1+4}{2} = \dfrac{3}{2}$, $y_I = \dfrac{2+2}{2} = 2$ et $z_I = \dfrac{0+1}{2} = \dfrac{1}{2}$ donc $I\left(\dfrac{3}{2}\,;2\,;\dfrac{1}{2}\right)$.

$\overrightarrow{AB}(5\,;0;1)$.

Appelons (*P*) le plan médiateur du segment $[AB]$.

$M(x;y;z) \in (P) \Leftrightarrow \overrightarrow{IM}.\overrightarrow{AB} = 0$

$$\Leftrightarrow 5\left(x-\frac{3}{2}\right)-0\times(y-2)+\left(z-\frac{1}{2}\right)=0$$

$$\Leftrightarrow 5x+z-\frac{15}{2}-\frac{1}{2}=0$$

$$\Leftrightarrow 5x+z-8=0.$$

$\boxed{5x+z-8=0 \text{ est une équation du plan médiateur du segment } [AB].}$

II. Représentation paramétrique d'une droite — *Corrigé*

Exercice 6 :
Les coordonnées d'un point de (*D*) sont obtenues en remplaçant *t* par un nombre, par exemple pour *t=0*, on obtient le point *A* de coordonnées $\boxed{(-7;0;4)}$ et celles d'un vecteur directeur de (*D*) en lisant les coefficients multiplicateurs du paramètre, ici *t* , $\boxed{(2;-3;1)}$ est un vecteur directeur de (*D*).

Exercice 7 : Soient $A(2;-1;3)$ et $B(4\,;1\,;\,2)$ deux points.
Déterminons une représentation paramétrique de la droite (*AB*).
La droite (*AB*) passe par le point $A(2;-1;3)$ et est dirigée par le vecteur $\overrightarrow{AB}(2;2;-1)$.

$M(x;y;z)\in(AB) \Leftrightarrow \overrightarrow{AM}$ et $\overrightarrow{AB}$ sont colinéaires avec $\overrightarrow{AM}(x-2;y+1;z-3)$

$\Leftrightarrow$ il existe un réel t tel que $\overrightarrow{AM}=t\,\overrightarrow{AB}$.

$\begin{cases} x-2=2t \\ y+1=2t \quad (t\in\mathbb{R}) \\ z-3=-t \end{cases}$ ou encore $\boxed{\begin{cases} x=2+2t \\ y=-1+2t \quad (t\in\mathbb{R}) \\ z=3-t \end{cases}}$ est une représentation paramétrique de (*AB*).

Exercice 8 :

Existe-t-il un même réel *t* tel que : $\begin{cases} 1=1+t \\ 0=-2t \\ 3=0{,}5t+2 \end{cases}$?

La première équation donne $t=1$ alors que la deuxième donne $t=0$.
Le point *A* de coordonnées $(1;\,0\,;3)$ n'appartient pas à la droite (*D*).

Exercice 9 :
On considère le plan (*P*) d'équation $x-y+z-11=0$ et le point *A* de coordonnées $(1;-1\,;3)$.
$\vec{n}(1;-1;1)$ est un vecteur normal à (*P*) et donc $\vec{n}$ est un vecteur directeur de (*D*).

$M(x,y,z)\in(D) \Leftrightarrow \overrightarrow{AM}$ et $\vec{n}$ sont colinéaires

$\Leftrightarrow$ il existe un réel *t* tel que $\overrightarrow{AM}=t\vec{n}$ avec $\overrightarrow{AM}(x-1;y+1;z-3)$

$\Leftrightarrow$ il existe un réel *t* tel que $\begin{cases} x-1=t \\ y+1=-t \\ z-3=t \end{cases}$.

Une représentation paramétrique de la droite (*D*) qui passe par *A* et qui est perpendiculaire au plan (*P*) est $\begin{cases} x=1+t \\ y=-1+t \quad (t\in\mathbb{R}) \\ z=3+t \end{cases}$.

III. Représentation paramétrique d'un plan *Corrigé*

Exercice 10 :

Les vecteurs $\vec{u}(5,1,-1)$ et $\vec{v}(-6,0,2)$ n'étant pas colinéaires, le système définit bien un plan que l'on va noter P'. Soit $M(x,y,z)$ un point de P'. Il existe donc deux réels t e t' tels que : $\begin{cases} x = 5t-6t' \\ y = 1+t \quad \text{et} \quad ' \\ z = -1-t+2t \end{cases}$.

Comme $x-2y+3z+5 = 5t-6t'-2(1+t)+3(-1-t+2t')+5 = 5t-6t'-2-2t-3-3t+6t'+5 = 0$, le point M est aussi un point de P et donc $P' = P$.

Exercice 11 :

Le vecteur $\vec{n}(1,-3,2)$ est un vecteur normal au plan *P*.

Les vecteurs $\vec{u}(1,-1,-2)$ et $\vec{v}(-2,0,1)$ forment un couple de vecteurs directeurs de Q.

Comme $\vec{u}\cdot\vec{n} = 1\times1-1\times(-3)-2\times2 = 0$ et $\vec{v}\cdot\vec{n} = -2\times1+0\times(-3)+1\times2 = 0$, le vecteur $\vec{n}$ est aussi normal au plan *Q*. Les deux plans sont donc parallèles.

Exercice 12 :

Les vecteurs $\vec{u}(-1,1,-3)$ et $\vec{v}(2,-1,1)$ forment un couple de vecteurs directeurs de P.

Le vecteur $\vec{w}(5,1,5)$ est un vecteur directeur de la droite *D*.

Pour que la droite *D* soit parallèle au plan *P*, il faut qu'il existe deux réels α et β tels que :

$\vec{w} = \alpha\vec{u} + \beta\vec{v}$:

$$\begin{cases} 5 = -\alpha+2\beta & L_1 \\ 1 = \alpha-\beta & L_2 \\ 5 = -3\alpha+\beta & L_3 \end{cases} \left| \begin{array}{l} L_2+L_3 :\ 6 = -2\alpha \Rightarrow \alpha = -3 \\ L_2 : \beta = \alpha-1 = -4 \\ \text{On vérifie dans } L_1 : -\alpha+2\beta = 3+2\times(-4) = -5 \neq 5 \end{array} \right.$$

Le système n'a pas de solutions, la droite et le plan ne sont pas parallèles.
Ils sont donc sécants en un point.

IV. Problèmes d'intersection *Corrigé*

Une droite et un plan

Exercice 13 : Étude de l'intersection de la droite (*D*) et du plan (*P*).

a) (*P*) est le plan d'équation $2x-y+5z-1=0$; un vecteur normal à (*P*) est $\vec{n}(2;-1;5)$.

(*D*) de représentation paramétrique $\begin{cases} x = 3t-1 \\ y = t-2 \\ z = -t+3 \end{cases}$ ($t\in$ r) a pour vecteur directeur $\vec{u}(3;1;-1)$.

$\vec{u}\bullet\vec{n} = 3\times2+1\times(-1)+(-1)\times5 = 0$ donc $\vec{u}\perp\vec{n}$: la droite (*D*) est parallèle au plan (*P*).

Cherchons si un point de (*D*) appartient à (*P*).

$A(-1;-2;3)\in(D)$; $2\times(-1)-(-2)+5\times3-1 = 14\neq0$ donc $A\notin(P)$.

$\boxed{\text{(}D\text{) est donc strictement parallèle à (}P\text{) : l'intersection de (}D\text{) et (}P\text{) est vide.}}$

b) (*P*) est le plan d'équation $x+y+z-1=0$; un vecteur normal à (*P*) est $\vec{n}(1;1;1)$.

(*D*) de représentation paramétrique $\begin{cases} x = 1+3t \\ y = -1+t \\ z = -3t+2 \end{cases}$ ($t\in$ r) a pour vecteur directeur $\vec{u}(3;1;-3)$.

$\vec{u} \bullet \vec{n} = 3\times1+1\times1+(-3)\times1 = 1 \neq 0$ donc $\vec{u}$ n'est pas orthogonal à $\vec{n}$: la droite (*D*) n'est pas parallèle au plan (*P*). Elle est sécante à (*P*) en un point dont les coordonnées $(x;y;z)$ sont solutions du système $\begin{cases} x = 1+3t \\ y = -1+t \\ z = 2-3t \\ x+y+z-1=0 \end{cases}$.

On résout ce système en remplaçant *x*, *y* et *z* par leur expression en fonction de *t* dans la dernière équation.

On obtient : $(1+3t)+(-1+t)+(2-3t)-1=0$, soit $t+1=0$ d'où $t=-1$.

On en déduit : $x = 1+3\times(-1) = -2$, $y = -1+(-1) = -2$, $z = 2-3\times(-1) = 5$.

(*D*) est sécante à (*P*) au point *I* de coordonnées $(-2;-2;5)$: l'intersection de (*D*) et (*P*) est $\{I\}$.

c) (*P*) est le plan d'équation $2x-3y+z=0$; un vecteur normal à (*P*) est $\vec{n}(2;-3;1)$.

(*D*) de représentation paramétrique $\begin{cases} x = 2+t \\ y = 2+t \quad (t \in \mathbb{R}) \\ z = 2+t \end{cases}$ a pour vecteur directeur $\vec{u}(1;1;1)$.

$\vec{u} \bullet \vec{n} = 1\times2+1\times(-3)+1\times1 = 0$ donc $\vec{u} \perp \vec{n}$: la droite (*D*) est parallèle au plan (*P*).

Cherchons si un point de (*D*) appartient à (*P*).

$A(2;2;2) \in (D)$; $2\times2-3\times2+2=0$ donc $A \in (P)$.

(*D*) est donc incluse dans (*P*) : l'intersection de (*D*) et (*P*) est (*D*).

Exercice 14 :

Le plan (*P*) d'équation $2x+3y-z+6=0$ a pour vecteur normal $\vec{n}(2;3;-1)$ et la droite (*D*) de représentation paramétrique $\begin{cases} x = -1-t \\ y = -\dfrac{3}{2}t \quad (t \in \mathbb{R}) \\ z = -3+\dfrac{1}{2}t \end{cases}$ a pour vecteur directeur $\vec{u}\left(-1;-\dfrac{3}{2};\dfrac{1}{2}\right)$.

Les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{n}$ sont colinéaires car leur coordonnées sont proportionnelles ($\vec{n} = -2\vec{u}$), donc la droite (*D*) est perpendiculaire au plan (*P*).

*Exercice 15 :

Soit (*P*) le plan d'équation $2x+y-3z+1=0$ et *A* le point de coordonnées $(1;\ 4\ ;7)$.

Le point *H* , projeté orthogonal de *A* sur (*P*), est l'intersection de (*P*) et de la droite (*D*) passant par *A*, orthogonale à (*P*).

Déterminons une représentation paramétrique de (*D*).

(*D*) est orthogonale à (*P*) donc un vecteur directeur de (*D*) est $\vec{n}(2;1;-3)$, vecteur normal à (*P*).

De plus, (*D*) passe par $A(1;4;7)$.

D'où (*D*) a pour représentation paramétrique $\begin{cases} x = 1+2t \\ y = 4+t \quad (t \in \mathbb{R}) \\ z = 7-3t \end{cases}$.

H appartient à (*D*) et à (*P*) donc ses coordonnées sont solutions du système $\begin{cases} x = 1+2t \\ y = 4+t \\ z = 7-3t \\ 2x+y-3z+1=0 \end{cases}$.

On résout ce système en remplaçant x, y et z par leur expression en fonction de t dans la dernière équation.
On obtient : $2(1+2t)+(4+t)-3(7-3t)+1=0$, soit $14t-14=0$ d'où $t=1$.
On en déduit les coordonnées de H : $x=3$, $y=5$, $z=4$.

$\boxed{\text{Le projeté orthogonal de } A \text{ sur } (P) \text{ est le point } H(3;5;4).}$

Deux plans

Exercice 16 :

a) $\vec{u}(2;1;2)$ et $\vec{v}(1;-2;6)$ sont des vecteurs normaux respectifs aux plans (P) et (Q).
$\vec{u}$ et $\vec{v}$ ne sont pas colinéaires (car leurs coordonnées ne sont pas proportionnelles), donc (P) et (Q) ne sont pas parallèles.
Leur intersection est la droite (d), dont $\begin{cases} 2x+y+2z+1=0 \\ x-2y+6z=0 \end{cases}$ est un système d'équations cartésiennes.
On peut en déterminer un système d'équations paramétriques de deux façons :

1ère méthode : On choisit une des inconnues (z par exemple) comme paramètre, et on résout le système:

$$\begin{cases} 2x+y+2z=0 \\ x-2y+6z=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x+y=-2t-1 \\ x-2y=-6t \\ z=t \quad (t\in\mathbb{R}) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4x+2y=-4t-2 \\ x-2y=-6t \\ z=t \quad (t\in\mathbb{R}) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 5x=-10t-2 \\ 2y=x+6t \\ z=t \quad (t\in\mathbb{R}) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-0,4-2t \\ y=-0,2+2t \\ z=t \quad (t\in\mathbb{R}) \end{cases}.$$

(P) et (Q) sont sécants suivant la droite (d) de représentation paramétrique $\begin{cases} x=-0,4-2t \\ y=-0,2+2t \quad (t\in\mathbb{R}) \\ z=t \end{cases}$

2ème méthode : On détermine un point et un vecteur directeur de (d) : $\begin{cases} 2x+y+2z+1=0 \\ x-2y+6z=0 \end{cases}$:

Avec $x=0$, le système devient : $\begin{cases} y+2z=-1 \\ -y+3z=0 \end{cases}$ dont la solution est : $y=-0,6$ et $z=-0,2$.
Ainsi, $A(0;-0,6;-0,2)$ est un point de (d).
De même, avec $y=0$, le système initial devient $\begin{cases} 2x+2z=-1 \\ x+6z=0 \end{cases}$ de solution $x=-0,6$ et $z=0,1$.
Donc $B(-0,6;0;0,1)$ est un autre point de (d). Donc $\overrightarrow{AB}(-0,6;0;0,1)$ est un vecteur directeur de (d), ainsi que $\dfrac{10}{3}\overrightarrow{AB}(-2;2;1)$.

Donc (d) admet pour système d'équations paramétriques : $\begin{cases} x=-2t \\ y=-0,6+2t \quad (t\in\mathbb{R}). \\ z=-0,2+t \end{cases}$

b) L'équation de (Q) proposée est équivalente à $x-2y+3z+1=0$, c'est à dire à celle de (P).
$\boxed{\text{Donc } (P) = (Q)\text{, et leur intersection est } (P).}$

c) $\vec{u}(-1;3;-1)$ et $\vec{v}(2;-6;2)$ sont des vecteurs normaux respectivement à (P) et (Q).

Or $\vec{v} = -2\vec{u}$, donc (*P*) // (*Q*). D'autre part, le point $M\left(0;0;1\right)$ appartient à (*P*), mais pas à (*Q*), donc $\boxed{(P) \text{ et } (Q) \text{ sont strictement parallèles : leur intersection est vide.}}$

Exercice 17 :

$\vec{u}(2;-1;3)$ est un vecteur normal à (*P*), donc à (*P'*) puisque (*P*) // (*P'*).

Ainsi, (*P'*) a une équation cartésienne de la forme $2x - y + 3z + d = 0$. De plus, $A(-1;2;5) \in (P')$, donc : $2\times(-1) - 2 + 3\times 5 + d = 0$, c'est à dire : $d = 32$.

$\boxed{\text{Donc une équation de } (P') \text{ est : } 2x - y + 3z + 32 = 0.}$

Deux droites

Exercice 18 :

a) Les points communs aux droites (*D*) et (*D'*) sont les points qui appartiennent à la fois aux droites (*D*) et (*D'*).

Leurs paramètres sont donnés par le système : $\begin{cases} -0{,}5t + 1 = -2k + 2 \\ 0{,}25t = k \\ t = 4k - 1 \end{cases}$.

Remplaçons *k* par $0{,}25t$ dans les équations 1 et 3. On obtient : $\begin{cases} -0{,}5t + 1 = -0{,}5t + 2 \\ t = 2t - 1 \end{cases}$.

La première équation n'a pas de solution. (*D*) et (*D'*) n'ont pas de point commun.

$\boxed{\text{Leur intersection est vide.}}$

b) Les points communs aux droites (*D*) et (*D'*) sont les points qui appartiennent à la fois aux droites (*D*) et (*D'*).

Leurs paramètres sont donnés par le système : $(S)\ \begin{cases} 1 + t = 2 + k \\ 1 - 2t = -1 + k \\ -3 = 1 - 3k \end{cases}$

La dernière équation donne : $3k = 4$; $\boxed{k = \frac{4}{3}}$.

La première équation devient : $1 + t = 2 + \frac{4}{3}$; $t = 1 + \frac{4}{3}$; $\boxed{t = \frac{7}{3}}$.

La deuxième s'écrit alors : $1 - 2\times\frac{7}{3} = -1 + \frac{4}{3}$; $1 - \frac{14}{3} = \frac{1}{3}$; $\boxed{-\frac{11}{3} = \frac{1}{3}}$, ce qui est impossible.

Le système (*S*) n'a pas de solution. (*D*) et (*D'*) n'ont pas de point commun.

$\boxed{\text{Leur intersection est vide.}}$

c) Les points communs aux droites (*D*) et (*D'*) sont les points qui appartiennent à la fois aux droites (*D*) et (*D'*).

Leurs paramètres sont donnés par le système : $\begin{cases} 2t - 1 = -2k - 1 \\ t + 1 = -k + 1 \\ t + 1 = k + 2 \end{cases}$,

système équivalent à : $\begin{cases} 2t - 1 = -2k - 1 \\ t + 1 = -k + 1 \\ -k + 1 = k + 2 \end{cases}$ $\begin{cases} 2t - 1 = -2k - 1 \\ t + 1 = -k + 1 \\ -1 = 2k \end{cases}$ $\begin{cases} k = -\frac{1}{2} \\ 2t - 1 = 1 - 1 \\ t + 1 = \frac{1}{2} + 1 \end{cases}$ $\begin{cases} k = -\frac{1}{2} \\ t = \frac{1}{2} \\ t = \frac{1}{2} \end{cases}$.

En remplaçant t par $\frac{1}{2}$ dans la représentation de (D) (ou k par $-\frac{1}{2}$ dans celle de (D')), on obtient $x=0$; $y=\frac{3}{2}$; $z=\frac{3}{2}$. $\boxed{(D) \text{ et } (D') \text{ sont sécantes en } I\left(0\,;\frac{3}{2}\,;\frac{3}{2}\right)}$

d) Les points communs aux droites (D) et (D') sont les points qui appartiennent à la fois aux droites (D) et (D').

Leurs paramètres sont donnés par le système : $(S)\quad \begin{cases} t=2+k \\ 2t=1 \\ 1-t=1+3k \end{cases}$.

La deuxième équation donne $t=\frac{1}{2}$.

En reportant dans les équations 1 et 3, on obtient $\begin{cases} \frac{1}{2}=2+k \\ 1-\frac{1}{2}=1+3k \end{cases} \quad \begin{cases} k=-\frac{3}{2} \\ k=-\frac{1}{6} \end{cases}$.

Le système (S) n'a pas de solution. (D) et (D') n'ont pas de point commun.
$\boxed{\text{Leur intersection est vide.}}$

Exercice 19 :
La droite (D) est dirigée par le vecteur $\vec{u}(3\,;2\,;-1)$ et la droite (D') par $\vec{v}(1\,;0\,;3)$.
Les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux car $\vec{u}.\vec{v}=3\times1+2\times0-1\times3=0$. ($D$) et ($D$') sont donc orthogonales.
Les points communs aux droites (D) et (D') sont les points qui appartiennent à la fois aux droites (D) et (D').

Leurs paramètres sont donnés par le système : $(S)\quad \begin{cases} 3t+1=2+k \\ 2t=1 \\ 1-t=1+3k \end{cases}$

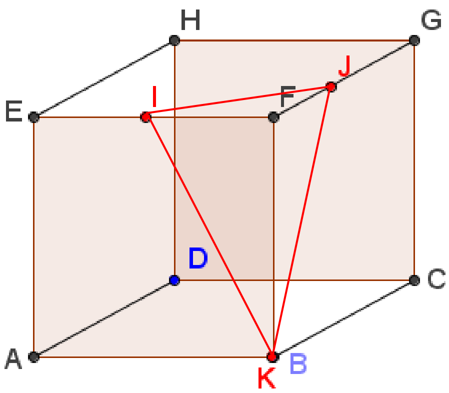
La deuxième équation donne $t=\frac{1}{2}$.

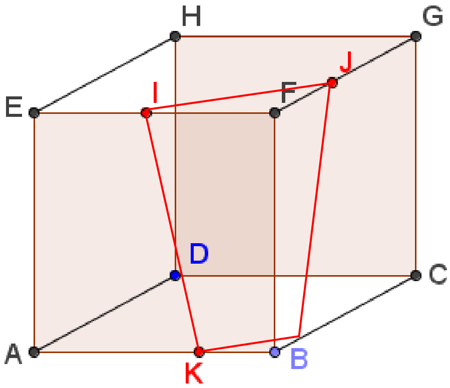
En reportant dans les équations 1 et 3, on obtient $\begin{cases} \frac{3}{2}+1=2+k \\ 1-\frac{1}{2}=1+3k \end{cases} \quad \begin{cases} k=\frac{1}{2} \\ k=-\frac{1}{6} \end{cases}$

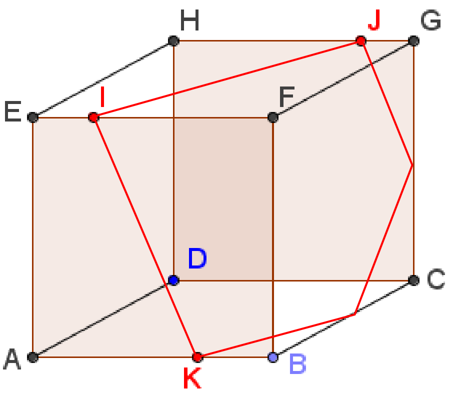
Le système (S) n'a pas de solution. (D) et (D') n'ont pas de point commun.
$\boxed{\text{Leur intersection est vide.}}$

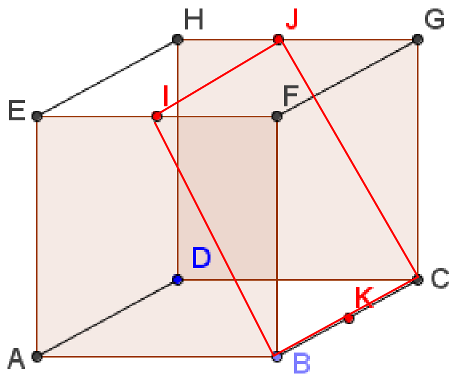
V. section du cube par un plan *Corrigé*

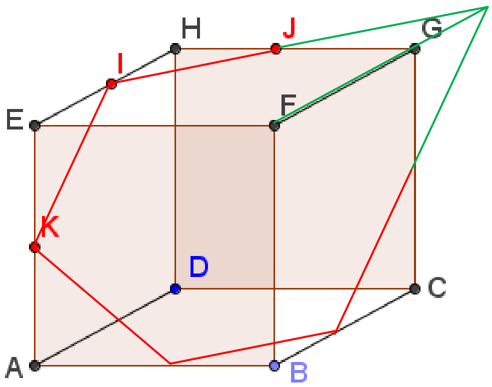
Exercice 20 :
Dans chaque cas, construire la section du cube par le plan (IJK).

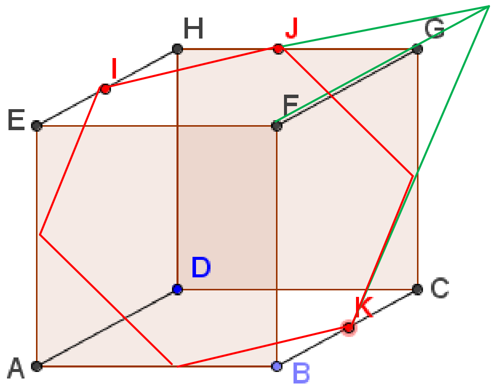












IV. Sphère	*Corrigé*

<u>Exercice 21</u> : $M(x;y;z)$ appartient à la sphère de centre $C(1;-2;1)$ et de rayon 3, si et seulement si : $CM=3$ ou encore $CM^2=9$. D'où : $(x-1)^2+(y+2)^2+(z-1)^2=9$.

En développant, on trouve comme équation de la sphère : $\boxed{x^2+y^2+z^2-2x+4y-2z-3=0}$.

Exercice 22 : $x^2+y^2+z^2-2x+4y-z=0$ (1), est équivalente à : $\left(x^2-2x\right)+\left(y^2+4y\right)+\left(z^2-z\right)=0$

$\Leftrightarrow \left(\left(x^2-2x+1\right)-1\right)+\left(\left(y^2+4y+4\right)-4\right)+\left(\left(z^2-z+\frac{1}{4}\right)-\frac{1}{4}\right)=0$

$\Leftrightarrow \left((x-1)^2-1\right)+\left((y+2)^2-4\right)+\left(\left(z-\frac{1}{2}\right)^2-\frac{1}{4}\right)=0 \Leftrightarrow (x-1)^2+(y+2)^2+\left(z-\frac{1}{2}\right)^2-\frac{25}{4}=0$

$\Leftrightarrow (x-1)^2+(y-(-2))^2+\left(z-\frac{1}{2}\right)^2=\frac{25}{4}$. Or $\frac{25}{4}>0$. Donc cette dernière équation est équivalente

à $\sqrt{(x-1)^2+(y-(-2))^2+\left(z-\frac{1}{2}\right)^2}=\frac{5}{2} \Leftrightarrow IM=\frac{5}{2}$:

$\boxed{M \text{ appartient à la sphère de centre } I\left(1;-2;\frac{1}{2}\right) \text{ et de rayon } r=\frac{5}{2}.}$

Exercice 23 : On considère la sphère (*S*) de centre $C(1;2;0)$ et de rayon 2.

a) $M\in(S) \Leftrightarrow CM=2 \Leftrightarrow CM^2=4 \Leftrightarrow (x-1)^2+(y-2)^2+(z-0)^2=4$

$\Leftrightarrow$ (*on développe*) : $x^2+y^2+z^2-2x-4y+1=0$.

b) On remplace *x* par 1, *y* par 0 et *z* par 0.
L'équation est vérifiée donc le point *A* appartient à la sphère (*S*).

c) (*P*) est le plan passant par *A* et de vecteur normal $\overrightarrow{AC}$.
$\overrightarrow{AC}(0;-2;0)$. Donc (*P*) a pour équation : $-2y+d=0$.
(*P*) passe par le point $A(1;0;0)$ d'où $d=0$, et $\boxed{\text{le plan } (P) \text{ a pour équation : } y=0.}$