

GÉOMÉTRIE DANS L'ESPACE

On se place dans un repère orthonormal du plan $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

I. Équation de plan

Exercice 1 : On considère le point $A(0;1;4)$ et le vecteur $\vec{n}(2;3;-1)$.

Déterminer une équation du plan (P) qui passe par A et qui admet \vec{n} comme vecteur normal.

Exercice 2 : On considère les points $A(1;1;0)$, $B(1;2;1)$ et $C(3;-1;2)$.

a) Vérifier que les points A , B et C ne sont pas alignés.

b) Démontrer que le plan (ABC) a pour équation cartésienne : $2x + y - z - 3 = 0$.

Exercice 3 : On considère les points $A(2;1;3)$, $B(-3;-1;7)$ et $C(3;2;4)$ et le vecteur $\vec{n}(2;-3;1)$.

a) Vérifier que \vec{n} est un vecteur normal au plan (ABC) .

b) Déterminer une équation du plan (ABC) .

Exercice 4 : Plan médiateur. On rappelle que le plan médiateur du segment $[AB]$ est le plan qui passe par le milieu du segment $[AB]$ et qui est perpendiculaire à $[AB]$.

On considère les points $A(-1;2;0)$ et $B(4;2;1)$.

Déterminer une équation du plan médiateur du segment $[AB]$.

II. Représentation paramétrique d'une droite

Exercice 6 :

Soit (D) la droite de représentation paramétrique :
$$\begin{cases} x = -7 + 2t \\ y = -3t \\ z = 4 + t \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R}).$$

Donner les coordonnées d'un point de (D) et celles d'un vecteur directeur de (D) .

Exercice 7 : Soient $A(2;-1;3)$ et $B(4;1;2)$ deux points.

Déterminer une représentation paramétrique de la droite (AB) .

Exercice 8 :

Soit (D) la droite de représentation paramétrique :
$$\begin{cases} x = t + 1 \\ y = -2t \\ z = 0,5t + 2 \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R}).$$

Le point A de coordonnées $(1;0;3)$ appartient-il à la droite (D) ?

Exercice 9 :

On considère le plan (P) d'équation $x - y + z - 11 = 0$ et le point A de coordonnées $(1;-1;3)$.

Donner une représentation paramétrique de la droite (D) qui passe par A et qui est perpendiculaire au plan (P) .

III. Représentation paramétrique d'un plan

Exercice 10 :

On considère le plan P d'équation $x - 2y + 3z + 5 = 0$.

Démontrer qu'une représentation paramétrique de P est :
$$\begin{cases} x = 5t - 6t' \\ y = 1 + t \\ z = -1 - t + 2t' \end{cases} \quad \text{où } (t ; t') \in \mathbb{R}^2$$

Exercice 11 :

Soit P le plan d'équation $x - 3y + 2z = 0$ et

Q le plan dont une représentation paramétrique est :
$$\begin{cases} x = 1 + t - 2t' \\ y = 2 - t \\ z = -2t + t' \end{cases} \quad \text{où } (t ; t') \in \mathbb{R}^2$$

Démontrer que les plans P et Q sont parallèles.

Exercice 12 :

Soit P le plan dont une représentation paramétrique est :
$$\begin{cases} x = 1 - t + 2t' \\ y = 2 + t - t' \\ z = -1 - 3t + t' \end{cases} \quad \text{où } (t ; t') \in \mathbb{R}^2$$

et D la droite dont une représentation paramétrique est :
$$\begin{cases} x = 1 + 5k \\ y = 3 + k \\ z = 5k \end{cases} \quad \text{où } k \in \mathbb{R}.$$

Etudier la position du plan P et de la droite D .

IV. Problèmes d'intersection

Une droite et un plan

Exercice 13 :

Déterminer l'intersection de la droite (D) et du plan (P) après avoir étudié leur parallélisme.

a) (P) est le plan d'équation $2x - y + 5z - 1 = 0$

et (D) la droite de représentation paramétrique
$$\begin{cases} x = 3t - 1 \\ y = t - 2 \\ z = -t + 3 \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R}).$$

b) (P) est le plan d'équation $x + y + z - 1 = 0$

et (D) la droite de représentation paramétrique
$$\begin{cases} x = 1 + 3t \\ y = -1 + t \\ z = -3t + 2 \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R}).$$

c) (P) est le plan d'équation $2x - 3y + z = 0$

et (D) la droite de représentation paramétrique
$$\begin{cases} x = 2 + t \\ y = 2 + t \\ z = 2 + t \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R}).$$

Exercice 14 : On considère le plan (P) d'équation $2x + 3y - z + 6 = 0$

et la droite (D) de représentation paramétrique
$$\begin{cases} x = -1 - t \\ y = -\frac{3}{2}t \\ z = -3 + \frac{1}{2}t \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R}) .$$

Montrer que la droite (D) est perpendiculaire au plan (P) .

*Exercice 15 :

Soit (P) le plan d'équation $2x + y - 3z + 1 = 0$ et A le point de coordonnées $(1; 4; 7)$.

Déterminer les coordonnées du point H , projeté orthogonal de A sur (P) .

Indication : H est l'intersection de (P) et de la droite passant par A , orthogonale à (P) .

Deux plans

Exercice 16 :

Déterminer l'intersection des plans (P) et (Q) après avoir étudié leur parallélisme.

a) (P) : $2x + y + 2z + 1 = 0$ et (Q) : $x - 2y + 6z = 0$.

b) (P) : $x - 2y + 3z + 1 = 0$ et (Q) : $2x - 4y + 6z + 2 = 0$.

c) (P) : $-x + 3y - z + 1 = 0$ et (Q) : $2x - 6y + 2z + 4 = 0$.

Exercice 17 : Le plan (P) a pour équation $2x - y + 3z - 5 = 0$.

Déterminer une équation du plan (P') parallèle à (P) et passant par le point $A(-1; 2; 5)$.

Deux droites

Exercice 18 : Déterminer l'intersection des droites (D) et (D') .

a) Les droites (D) et (D') ont pour représentations paramétriques respectives

$$(D) : \begin{cases} x = -0,5t + 1 \\ y = 0,25t \\ z = t \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R}) \quad \text{et} \quad (D') : \begin{cases} x = -2k + 2 \\ y = k \\ z = 4k - 1 \end{cases} \quad (k \in \mathbb{R}) .$$

b) Les droites (D) et (D') ont pour représentations paramétriques respectives

$$(D) : \begin{cases} x = 1 + t \\ y = 1 - 2t \\ z = -3 \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R}) \quad \text{et} \quad (D') : \begin{cases} x = 2 + k \\ y = -1 + k \\ z = 1 - 3k \end{cases} \quad (k \in \mathbb{R}) .$$

c) Les droites (D) et (D') ont pour représentations paramétriques respectives

$$(D) : \begin{cases} x = 2t - 1 \\ y = t + 1 \\ z = t + 1 \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R}) \quad \text{et} \quad (D') : \begin{cases} x = -2k - 1 \\ y = -k + 1 \\ z = k + 2 \end{cases} \quad (k \in \mathbb{R}) .$$

d) Les droites (D) et (D') ont pour représentations paramétriques respectives

$$(D) : \begin{cases} x = t \\ y = 2t \\ z = 1 - t \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R}) \quad \text{et} \quad (D') : \begin{cases} x = 2 + k \\ y = 1 \\ z = 1 + 3k \end{cases} \quad (k \in \mathbb{R}) .$$

Exercice 19 : Les droites (D) et (D') ont pour représentations paramétriques respectives

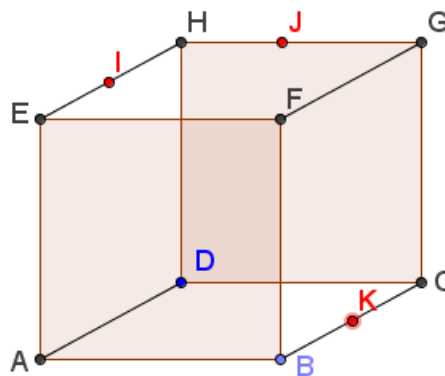
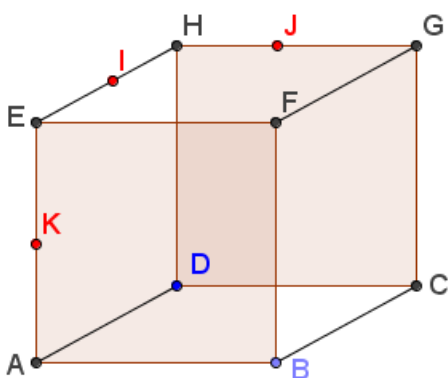
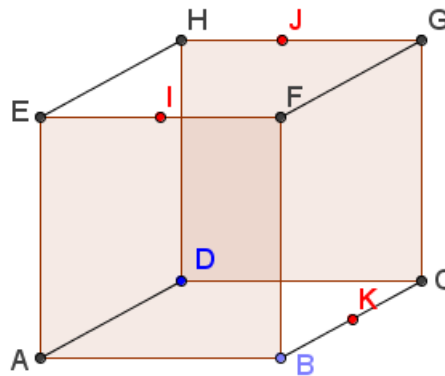
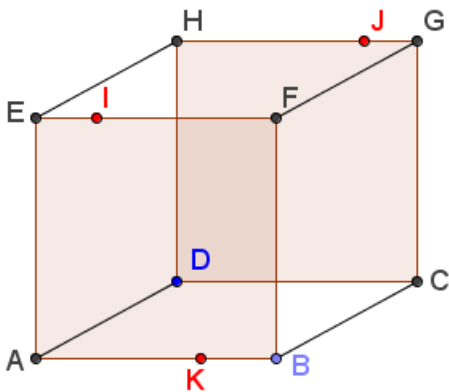
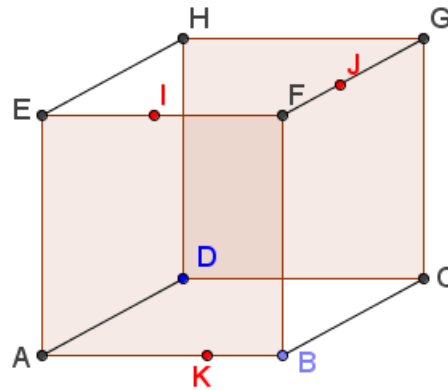
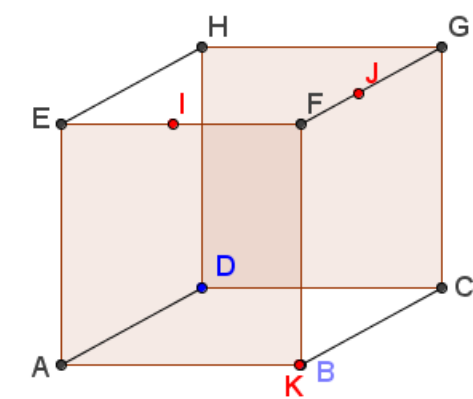
$$(D) : \begin{cases} x = 3t + 1 \\ y = 2t \\ z = 1 - t \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R}) \quad \text{et} \quad (D') : \begin{cases} x = 2 + k \\ y = 1 \\ z = 1 + 3k \end{cases} \quad (k \in \mathbb{R}).$$

Montrer que les droites (D) et (D') sont orthogonales. Sont-elles sécantes ?

V. Section du cube par un plan

Exercice 20 :

Dans chaque cas, construire la section du cube par le plan (IJK) .



VI. Pour aller plus loin : La Sphère (HORS programme)

Exercice 21 : Déterminer une équation de la sphère de centre $C(1; -2; 1)$ et de rayon 3.

Exercice 22 : Déterminer le centre et le rayon de la sphère d'équation : $x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 4y = 0$.

Exercice 23 : On considère la sphère (S) de centre $C(1; 2; 0)$ et de rayon 2.

a) Donner une équation de cette sphère.

b) Montrer que le point $A(1; 0; 0)$ appartient à (S) .

c) Déterminer une équation du plan (P) tangent en A à (S) .

Indication : (P) est le plan passant par A et perpendiculaire à (CA) .