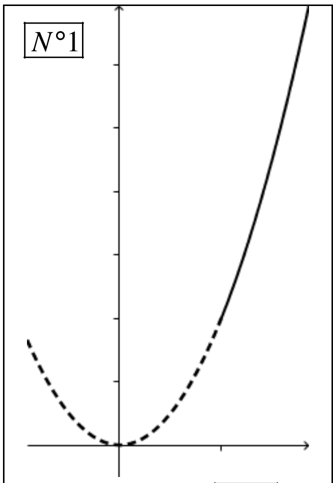
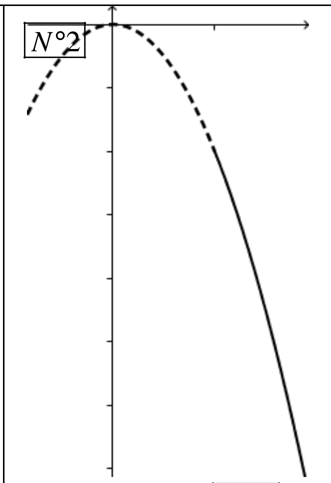
LIMITES ET ASYMPTOTES

I. Lectures graphiques

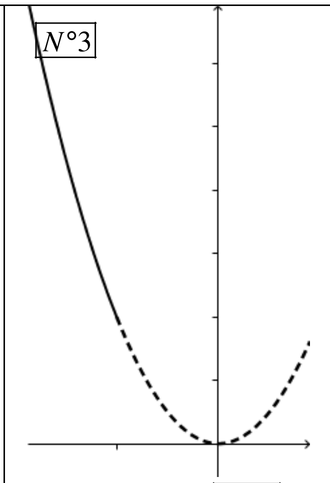
<u>Exercice 1</u> : Sur le modèle de l'exemple 1, compléter les cases.



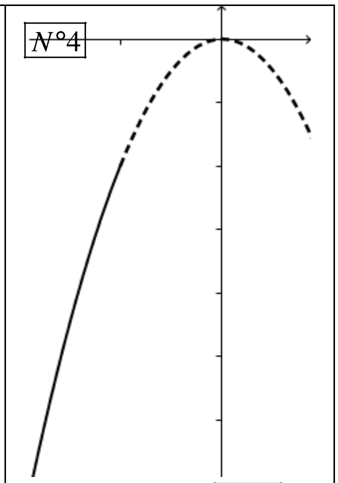
$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \boxed{+\infty}$



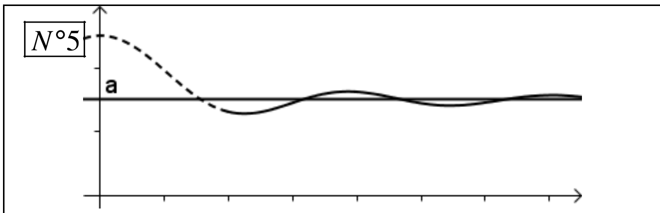
$\lim\limits_{x \to \square} f(x) = \square$



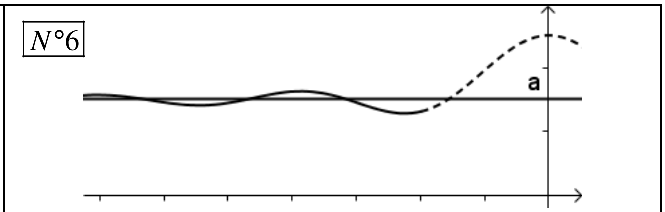
$\lim\limits_{x \to \square} f(x) = \square$



$\lim\limits_{x \to \square} f(x) = \square$

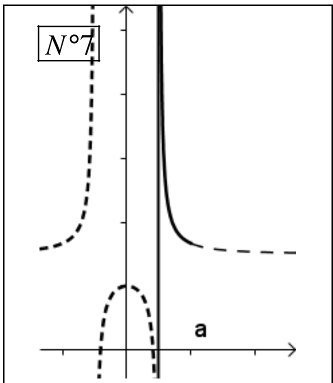


$\lim\limits_{x \to \square} f(x) = \square$

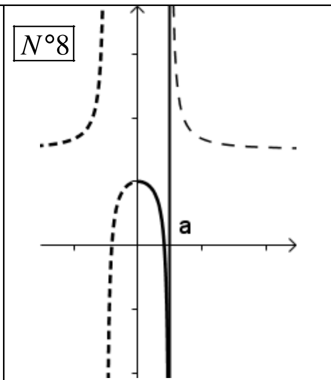


$\lim\limits_{x \to \square} f(x) = \square$

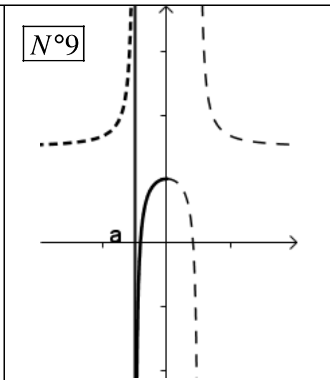
La droite d'équation $\square$ est $\square$



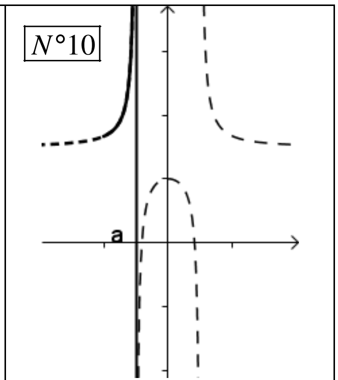
$\lim\limits_{\substack{x \to \square \\ \square}} f(x) = \square$



$\lim\limits_{\substack{x \to \square \\ \square}} f(x) = \square$



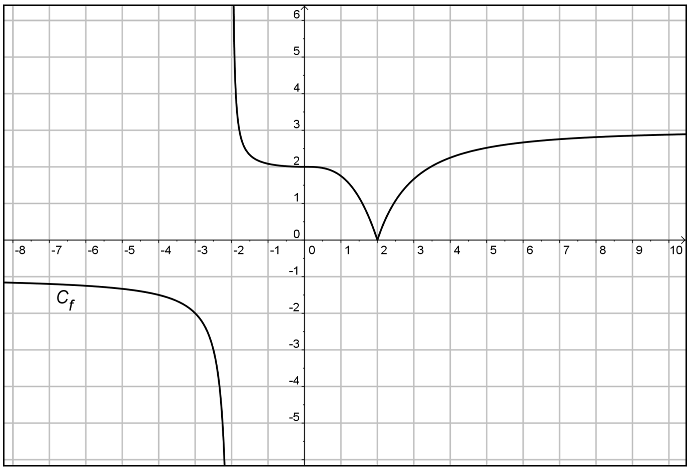
$\lim\limits_{\substack{x \to \square \\ \square}} f(x) = \square$



$\lim\limits_{\substack{x \to \square \\ \square}} f(x) = \square$

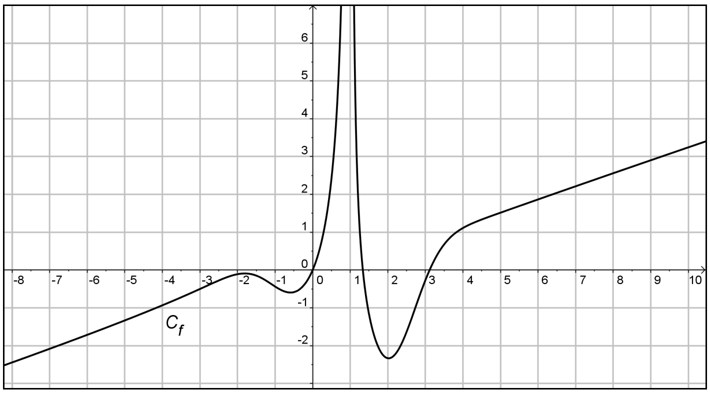
La droite d'équation $\square$ est $\square$

<u>Exercice 2</u> : La courbe ci-dessous représente une fonction *f*.



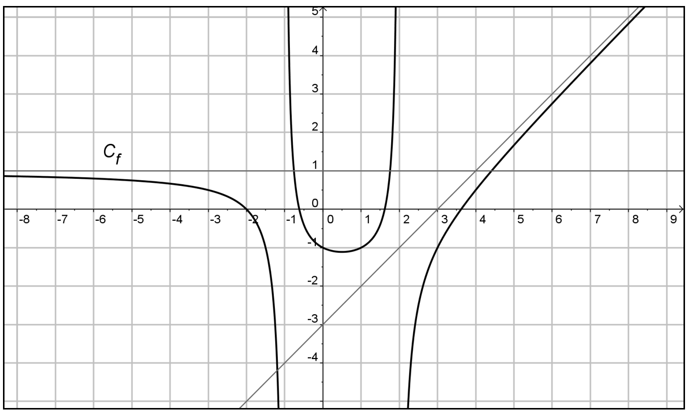
1) À l'aide du graphique, déterminer les limites suivantes :
   a) $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ b) $\lim\limits_{\substack{x\to2\\x<2}} f(x)$ et $\lim\limits_{\substack{x\to2\\x>2}} f(x)$ c) $\lim\limits_{x\to2} f(x)$ d) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$
2) En déduire les asymptotes éventuelles et en donner les équations.

<u>Exercice 3</u> : La courbe ci-dessous représente une fonction *f*.



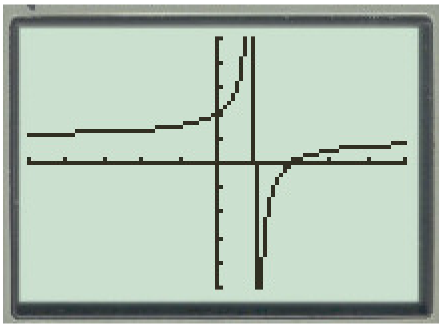
1) À l'aide du graphique, dire si la fonction admet une limite en α et si oui, donner cette limite.
   a) $\alpha=-\infty$ b) $\alpha=0$ c) $\alpha=1$ d) $\alpha=+\infty$
2) Interpréter graphiquement.

<u>Exercice 4</u> : La fonction *f* représentée ci-dessous est définie sur $\mathbf{R}\setminus\{-1;2\}$.



1) Déterminer graphiquement les limites de *f* aux bornes de son ensemble de définition.
2) Donner les asymptotes à la courbe.

Exercice 5 : On a tracé à l'aide de la calculatrice la courbe représentative d'une fonction *f*.
Déterminer graphiquement les limites en $-\infty$, en $+\infty$ et en 1 (une graduation = une unité).



II. Limites et asymptotes

Exercice 6 : On considère une fonction *f* définie sur $]-\infty;2[\cup]2;+\infty[$.
À l'aide des indications données, compléter dans chaque cas la phrase suivante :
« la droite d'équation ……. est asymptote …… à la courbe représentative de *f* ».

a) $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=3$ b) $\lim\limits_{x\to 2} f(x)=-\infty$ c) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=-5$

Exercice 7 : Interpréter géométriquement les limites suivantes :

a) $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=+\infty$ b) $\lim\limits_{x\to -5} f(x)=-\infty$ c) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\dfrac{3}{2}$

d) $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=7$ e) $\lim\limits_{\substack{x\to 3\\x<3}} f(x)=+\infty$ et $\lim\limits_{\substack{x\to 3\\x>3}} f(x)=-\infty$

Exercice 8 : Construire une courbe représentative d'une fonction *f* respectant les données suivantes :
$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=0$; $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\x<1}} f(x)=+\infty$; $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\x>1}} f(x)=-\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$.

Exercice 9 : Traduire à l'aide de limites.

a) La droite d'équation $y=5$ est asymptote à la courbe de *f*.
b) La droite d'équation $y=0$ est asymptote à la courbe de *f*.
c) La droite d'équation $x=4$ est asymptote à la courbe de *f*.
d) La courbe de la fonction f admet pour asymptote la droite d'équation $x=-2$.
f) La courbe de la fonction *f* admet pour asymptote l'axe des abscisses.

III. Détermination de limites

En utilisant les opérations

Exercice 10 : Déterminer les limites suivantes :

a) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x^2+2+\dfrac{1}{x}\right)$ b) $\lim\limits_{\substack{x\to 2\\x<2}} \dfrac{1}{x-2}\left(x^2+3\right)$ c) $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\dfrac{1}{x-2}+\dfrac{1}{x}\right)$

d) $\lim\limits_{x\to+\infty} x^2\left(1-\dfrac{1}{x}\right)$ e) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{x^2}+2x-1\right)$ f) $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\dfrac{1}{x}-3\right)(-2x+1)$

En appliquant les théorèmes

Exercice 11 : *Limites de polynômes et fonctions rationnelles en l'infini.*
Déterminer les limites suivantes :

a) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(2x^4-3x+1\right)$ b) $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(1-x^3+2x\right)$ c) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{3x^2-1}{x+3}$

d) $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{2x+7}{x^3-1}$ e) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1-2x^3}{5x^3+2x+3}$.

Exercice 12 : *Limites de fonctions rationnelles au bord d'une valeur interdite.*
Déterminer les limites suivantes :

a) $\lim\limits_{\substack{x\to3\\x>3}}\dfrac{1}{3-x}$ b) $\lim\limits_{\substack{x\to2\\x<2}}\dfrac{7-2x}{x-2}$ c) $\lim\limits_{\substack{x\to-3\\x>-3}}\dfrac{1+2x}{x+3}$

d) $\lim\limits_{\substack{x\to1\\x<1}}\dfrac{1}{1-x^2}$ et $\lim\limits_{\substack{x\to1\\x>1}}\dfrac{1}{1-x^2}$

Exercice 13 : *Limites de fonctions composées.*
Déterminer les limites suivantes :

a) $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{x^3+2x-1}$ b) $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{\dfrac{x^4+2x^2+1}{x^2+2}}$ c) $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{\dfrac{x^2+1}{4x^2+2}}$

d) $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{\dfrac{1}{4x^2+2}}$ e) $\lim\limits_{\substack{x\to1\\x>1}}\sqrt{\dfrac{1}{x^2-1}}$ f) $\lim\limits_{x\to+\infty}\cos\left(\dfrac{\pi x-1}{4x}\right)$.

En cas d'indétermination

Exercice 14 :
Pour chacune des limites suivantes, si on utilise les théorèmes sur les opérations, on obtient une forme indéterminée : dire de quelle forme il s'agit.

a) $\lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}}\dfrac{\sin x}{x}$ b) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x^2+1-\sqrt{x}\right)$ c) $\lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}}\dfrac{\sqrt{x+1}-1}{x}$ d) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2-4}-x\right)$

Exercice 15 : (difficile)
Pour chacune des deux limites suivantes, on obtient une forme indéterminée. (cf ex 16).
On propose dans chacun des cas une méthode pour lever l'indétermination.

1) $f(x)=x^2+1-\sqrt{x}$ et on veut déterminer $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$

a) Montrer que pour tout réel $x>0$, on a : $f(x)=x^2\left(1+\dfrac{1}{x^2}-\dfrac{1}{x\sqrt{x}}\right)$.

b) En déduire $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$.

2) $f(x)=\sqrt{x^2-4}-x$. f est définie sur $[2;+\infty[$ et on veut déterminer $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$.

a) Montrer que pour tout réel x ? 2 , $f(x)=\dfrac{-4}{\sqrt{x^2-4}+x}$.

b) En déduire $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$.

IV. Théorèmes de comparaison

Exercice 16 : Étudier la limite en $+\infty$ de la fonction f définie sur **R** par :

a) $f(x) = x^2 + \sin x$ b) $f(x) = \sin^2 x - x$

Exercice 17 : Soit f une fonction définie sur **R** telle que, pour tout réel x, $5 \leq f(x) \leq 8$.

On considère la fonction g définie sur $]-\infty\,;0[$ par $g(x) = \dfrac{3f(x)-1}{x}$.

Étudier la limite de g en $-\infty$.