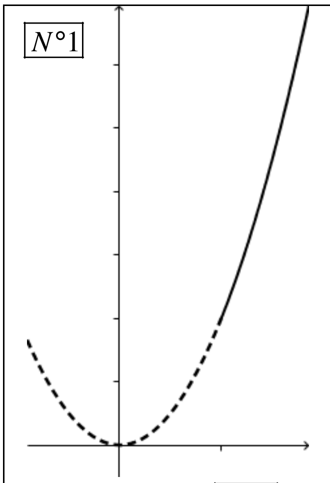
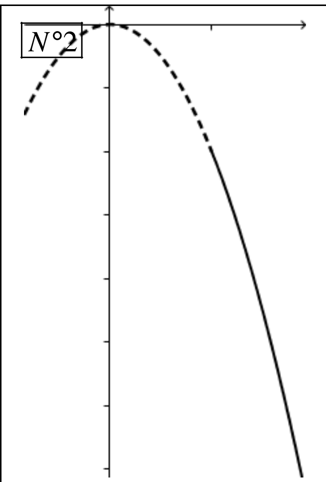
LIMITES ET ASYMPTOTES

I. Lectures graphiques *Corrigé*

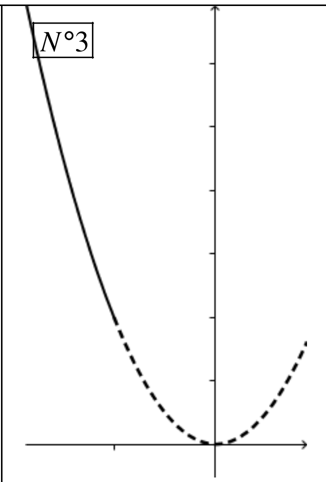
Exercice 1 :



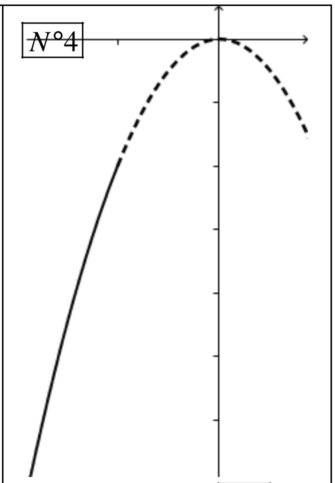
$\lim\limits_{x\to \boxed{+\infty}} f(x) = \boxed{+\infty}$



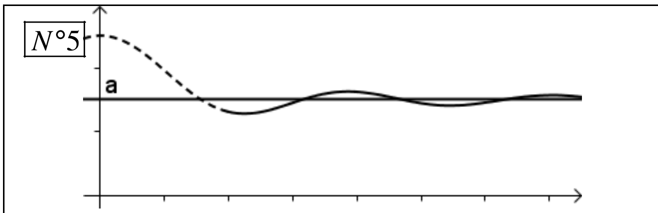
$\lim\limits_{x\to \boxed{+\infty}} f(x) = \boxed{-\infty}$



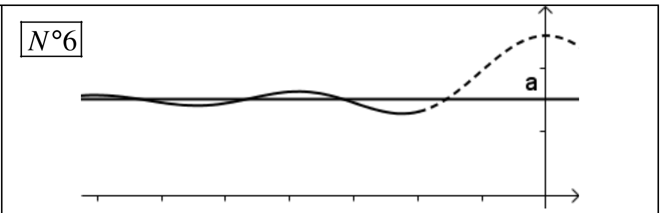
$\lim\limits_{x\to \boxed{-\infty}} f(x) = \boxed{+\infty}$



$\lim\limits_{x\to \boxed{-\infty}} f(x) = \boxed{-\infty}$

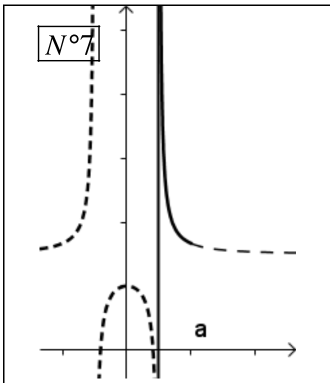


$\lim\limits_{x\to \boxed{+\infty}} f(x) = \boxed{a}$

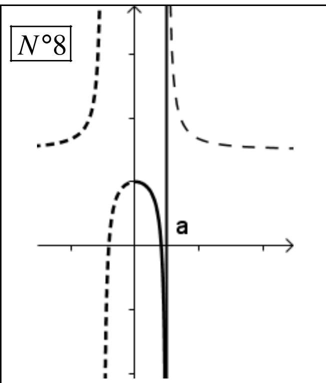


$\lim\limits_{x\to \boxed{-\infty}} f(x) = \boxed{a}$

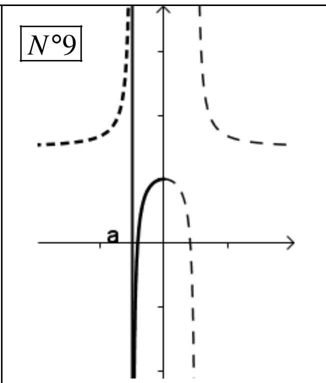
La droite d'équation $\boxed{y=a}$ est $\boxed{\text{une asymptote horizontale à la courbe}}$



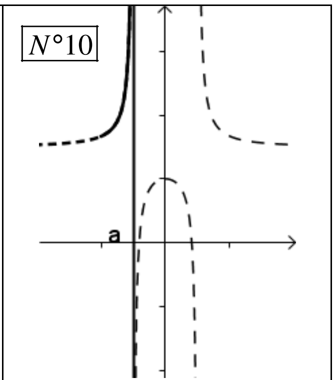
$\lim\limits_{\substack{x\to \boxed{a} \\ \boxed{x>a}}} f(x) = \boxed{+\infty}$



$\lim\limits_{\substack{x\to \boxed{a} \\ \boxed{x<a}}} f(x) = \boxed{-\infty}$



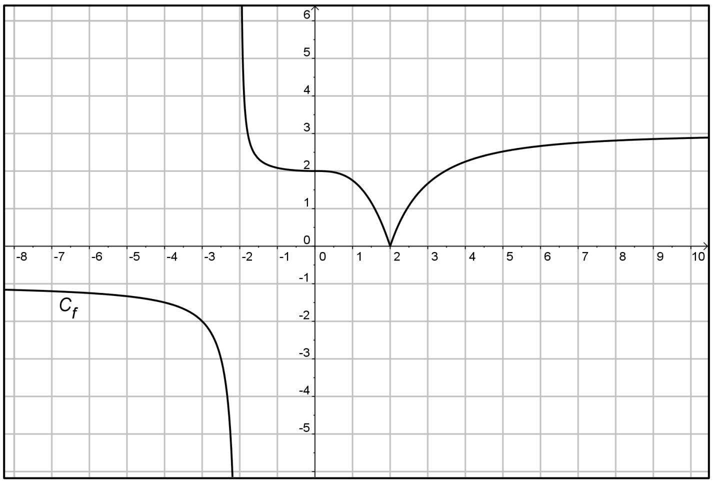
$\lim\limits_{\substack{x\to \boxed{a} \\ \boxed{x>a}}} f(x) = \boxed{-\infty}$



$\lim\limits_{\substack{x\to \boxed{a} \\ \boxed{x<a}}} f(x) = \boxed{+\infty}$

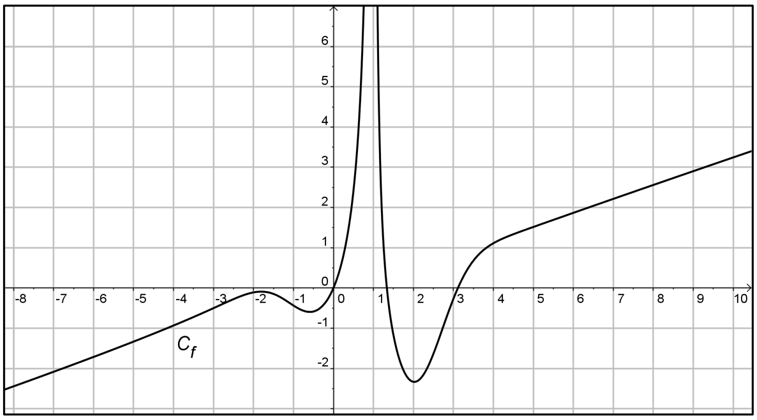
La droite d'équation $\boxed{x=a}$ est $\boxed{\text{une asymptote verticale à la courbe}}$

Exercice 2 : La courbe ci-contre représente une fonction *f*.



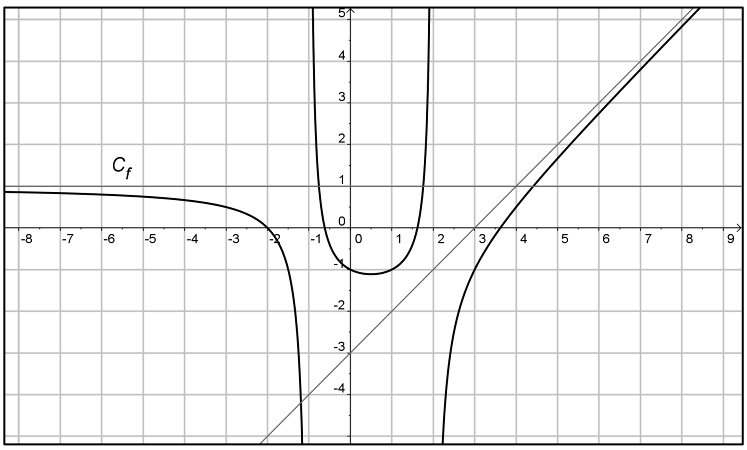
1) La fonction *f* représentée ci-contre admet les limites suivantes :
   a) $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -1$
   b) $\lim\limits_{\substack{x \to -2 \\ x < -2}} f(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{\substack{x \to -2 \\ x > -2}} f(x) = +\infty$
   c) $\lim\limits_{x \to 2} f(x) = 0$
   d) $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 3$
2) On en déduit l'existence de trois asymptotes :
   Une asymptote horizontale d'équation $y = -1$ car $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -1$;
   une asymptote verticale d'équation $x = -2$ car $\lim\limits_{\substack{x \to -2 \\ x < -2}} f(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{\substack{x \to -2 \\ x > -2}} f(x) = +\infty$;
   une asymptote horizontale d'équation $y = 3$ car $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 3$.

Exercice 3 : La courbe ci-contre représente une fonction *f*.



1) a) En $-\infty$, la fonction *f* admet pour limite $-\infty$.
   b) En 0, la fonction *f* admet pour limite 0.
   c) En 1, la fonction *f* admet pour limite $+\infty$.
   d) En $+\infty$, la fonction *f* admet pour limite $+\infty$.
2) De la question 1b) ($\lim\limits_{x \to 1} f(x) = +\infty$),
   on peut déduire que la courbe représentative de *f* admet la droite d'équation $x = 1$ comme asymptote verticale.

Exercice 4 : La fonction *f* représentée ci-contre est définie sur $\mathbf{R} \setminus \{-1; 2\}$.



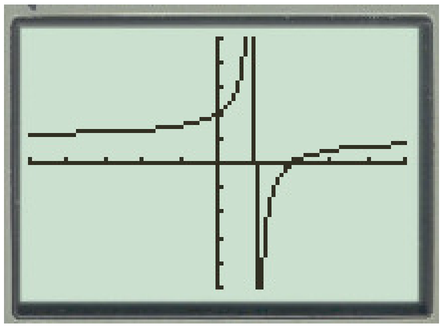
1) $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 1$;
   $\lim\limits_{\substack{x \to -1 \\ x < -1}} f(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{\substack{x \to -1 \\ x > -1}} f(x) = +\infty$;
   $\lim\limits_{\substack{x \to 2 \\ x < 2}} f(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{\substack{x \to 2 \\ x > 2}} f(x) = -\infty$;
   $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$.
2) La courbe admet quatre asymptotes :
   une asymptote horizontale d'équation $y = 1$;
   deux asymptotes verticales d'équations $x = -1$ et $x = 2$;
   une asymptote oblique d'équation $y = x - 3$.

Exercice 5 :

La fonction *f* représentée ci-contre admet les limites suivantes :

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=1$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=1$;

$\lim\limits_{\substack{x\to1\\x<1}} f(x)=+\infty$ et $\lim\limits_{\substack{x\to1\\x>1}} f(x)=-\infty$.



Remarque : la calculatrice a ses « limites ».
On a l'impression que la courbe a des points communs avec la droite d'équation $x=1$*. Ceci est dû au tracé approximatif des courbes par une calculatrice.*

II. Limites et asymptotes *Corrigé*

Exercice 6 : *f* est une fonction définie sur $]-\infty;2[\cup]2;+\infty[$.

a) $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=3$:
la droite d'équation $y=3$ est asymptote horizontale à la courbe représentative de *f*.

b) $\lim\limits_{x\to2} f(x)=-\infty$:
la droite d'équation $x=2$ est asymptote verticale à la courbe représentative de *f*.

c) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=-5$:
la droite d'équation $y=-5$ est asymptote horizontale à la courbe représentative de *f*.

Exercice 7 :

a) $\lim\limits_{x\to0} f(x)=+\infty$:
la droite d'équation $x=0$ est asymptote verticale à la courbe représentative de *f*.

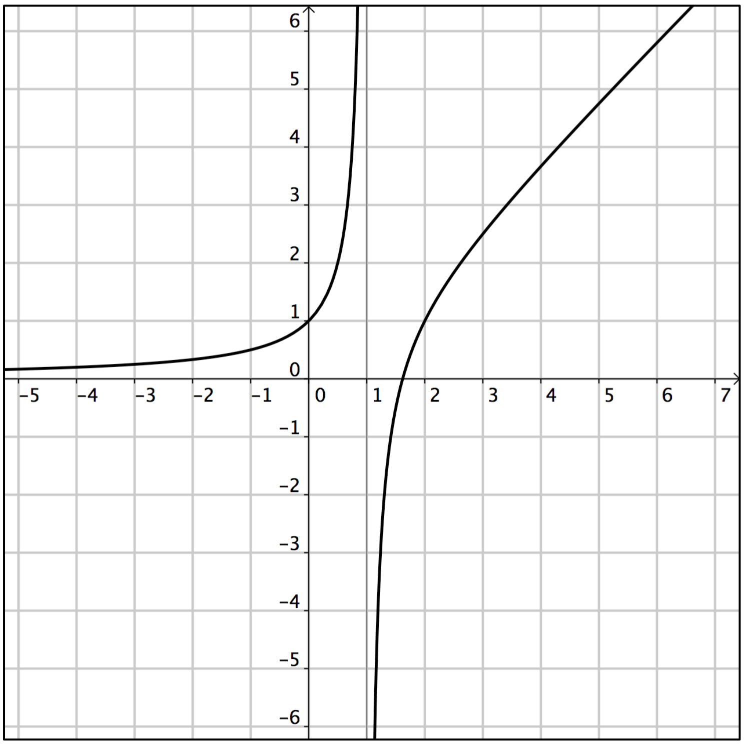
b) $\lim\limits_{x\to-5} f(x)=-\infty$:
la droite d'équation $x=-5$ est asymptote verticale à la courbe représentative de *f*.

c) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\dfrac{3}{2}$:
la droite d'équation $y=\dfrac{3}{2}$ est asymptote horizontale à la courbe représentative de *f*.

d) $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=7$:
la droite d'équation $y=7$ est asymptote horizontale à la courbe représentative de *f*.

e) $\lim\limits_{\substack{x\to3\\x<3}} f(x)=+\infty$ et $\lim\limits_{\substack{x\to3\\x>3}} f(x)=-\infty$:
la droite d'équation $x=3$ est asymptote verticale à la courbe représentative de *f*.

Exercice 8 : La courbe ci-dessous représente une fonction *f* telle que :
$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=0$; $\lim\limits_{\substack{x\to1\\x<1}} f(x)=+\infty$; $\lim\limits_{\substack{x\to1\\x>1}} f(x)=-\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$.



Exercice 9 :

a) La droite d'équation $y=5$ est asymptote à la courbe de *f* se traduit par $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=5$.

b) La droite d'équation $y=0$ est asymptote à la courbe de *f* se traduit par $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=0$.

c) La droite d'équation $x=4$ est asymptote à la courbe de *f* se traduit par $\lim\limits_{x\to 4} f(x)=\infty$.

d) La courbe de la fonction *f* admet pour asymptote la droite d'équation $x=-2$: $\lim\limits_{x\to -2} f(x)=\infty$.

f) La courbe de la fonction *f* admet pour asymptote l'axe des abscisses : $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=0$

III. Détermination de limites *Corrigé*

En utilisant les opérations

Exercice 10 :

a) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x^2+2+\dfrac{1}{x}\right)$:

$\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x^2+2\right)=+\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{x}=0$ donc $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x^2+2+\dfrac{1}{x}\right)=+\infty}$ (limite d'une somme).

b) $\lim\limits_{\substack{x\to 2\\ x<2}}\dfrac{1}{x-2}\left(x^2+3\right)$:

$\lim\limits_{\substack{x\to 2\\ x<2}}(x-2)=0^-$ donc $\lim\limits_{\substack{x\to 2\\ x<2}}\dfrac{1}{x-2}=-\infty$.

De plus, $\lim\limits_{x\to 2}\left(x^2+3\right)=7$ donc $\boxed{\lim\limits_{\substack{x\to 2\\ x<2}}\dfrac{1}{x-2}\left(x^2+3\right)=-\infty}$ (limite d'un produit).

c) $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\dfrac{1}{x-2}+\dfrac{1}{x}\right)$:

$\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{1}{x-2}=0$ et $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{1}{x}=0$ donc $\boxed{\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\dfrac{1}{x-2}+\dfrac{1}{x}\right)=0}$ (limite d'une somme).

d) $\lim\limits_{x\to+\infty}x^2\left(1-\dfrac{1}{x}\right)$:

$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{x}=0$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1-\dfrac{1}{x}\right)=1$.

De plus, $\lim\limits_{x\to+\infty}x^2=+\infty$ donc $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty}x^2\left(1-\dfrac{1}{x}\right)=+\infty}$ (limite d'un produit).

e) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{x^2}+2x-1\right)$:

$\lim\limits_{x\to 0}x^2=0^+$ donc $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{x^2}=+\infty$.

De plus, $\lim\limits_{x\to 0}(2x-1)=-1$ donc $\boxed{\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{x^2}+2x-1\right)=+\infty}$ (limite d'une somme).

f) $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\dfrac{1}{x}-3\right)(-2x+1)$:

$\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{1}{x}=0$ donc $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\dfrac{1}{x}-3\right)=-3$.

De plus, $\lim\limits_{x\to-\infty}(-2x+1)=+\infty$ donc $\boxed{\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\dfrac{1}{x}-3\right)(-2x+1)=-\infty}$ (limite d'un produit).

En appliquant les théorèmes

Exercice 11 : *Limites de polynômes et fonctions rationnelles en l'infini. Rappel :*

> *La limite d'un polynôme en l'infini est celle de son monôme de plus haut degré.*
> *La limite d'une fonction rationnelle en l'infini est celle du rapport des monômes de plus haut degré.*

a) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(2x^4-3x+1\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}2x^4=+\infty$

b) $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(1-x^3+2x\right)=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(-x^3\right)=+\infty$

c) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{3x^2-1}{x+3}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{3x^2}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}3x=+\infty$

d) $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{2x+7}{x^3-1}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{2x}{x^3}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{2}{x^2}=0$

e) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1-2x^3}{5x^3+2x+3}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{-2x^3}{5x^3}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{-2}{5}=-\dfrac{2}{5}$.

Exercice 12 : *Limites de fonctions rationnelles au bord d'une valeur interdite.*

a) $\lim\limits_{\substack{x\to 3\\ x>3}}\dfrac{1}{3-x}$:

$\lim\limits_{\substack{x\to 3\\ x>3}}(3-x)=0^-$ donc par passage à l'inverse : $\boxed{\lim\limits_{\substack{x\to 3\\ x>3}}\dfrac{1}{3-x}=-\infty}$

b) $\lim\limits_{\substack{x\to 2\\ x<2}}\dfrac{7-2x}{x-2}$:

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{\substack{x\to 2\\ x<2}}(7-2x)=7-2\times 2=3\\ \lim\limits_{\substack{x\to 2\\ x<2}}(x-2)=0^-\end{array}\right\}\ (\text{quotient})\quad \boxed{\lim\limits_{\substack{x\to 2\\ x<2}}\frac{7-2x}{x-2}=-\infty}$$

c) $\lim\limits_{\substack{x\to -3\\ x>-3}}\dfrac{1+2x}{x+3}$:

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{\substack{x\to -3\\ x>-3}}(1+2x)=1+2\times(-3)=-5\\ \lim\limits_{\substack{x\to -3\\ x>-3}}(x+3)=0^+\end{array}\right\}\ (\text{quotient})\quad \boxed{\lim\limits_{\substack{x\to -3\\ x>-3}}\frac{1+2x}{x+3}=-\infty}$$

d) $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x<1}}\dfrac{1}{1-x^2}$ et $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x>1}}\dfrac{1}{1-x^2}$:

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$1-x^2$		$-$	0	$+$	0	$-$	

$\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x<1}}\left(1-x^2\right)=0^+$ et par passage à l'inverse $\boxed{\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x<1}}\dfrac{1}{1-x^2}=-\infty}$

$\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x>1}}\left(1-x^2\right)=0^-$ et par passage à l'inverse $\boxed{\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x>1}}\dfrac{1}{1-x^2}=-\infty}$

<u>Exercice 13</u> : *Limites de fonctions composées.*

a) $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{x^3+2x-1}$: soit $f(x)=\sqrt{u(x)}$ où $u(x)=x^3+2x-1$.

$\lim\limits_{x\to+\infty}u(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}x^3=+\infty$ (limite d'un polynôme en l'infini).

On pose $X=u(x)$. $\lim\limits_{X\to+\infty}\sqrt{X}=+\infty$ donc $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty}$ (limite d'une composée).

b) $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{\dfrac{x^4+2x^2+1}{x^2+2}}$: soit $f(x)=\sqrt{u(x)}$ où $u(x)=\dfrac{x^4+2x^2+1}{x^2+2}$.

$\lim\limits_{x\to+\infty}u(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^4}{x^2}=\lim\limits_{x\to+\infty}x^2=+\infty$ (limite d'une fonction rationnelle en l'infini).

On pose $X=u(x)$. $\lim\limits_{X\to+\infty}\sqrt{X}=+\infty$ donc $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty}$ (limite d'une composée).

c) $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{\dfrac{x^2+1}{4x^2+2}}$: soit $f(x)=\sqrt{u(x)}$ où $u(x)=\dfrac{x^2+1}{4x^2+2}$.

$\lim\limits_{x\to+\infty}u(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^2}{4x^2}=\dfrac{1}{4}$ (limite d'une fonction rationnelle en l'infini).

On pose $X=u(x)$. $\lim\limits_{X\to\frac{1}{4}}\sqrt{X}=\dfrac{1}{2}$ donc $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\dfrac{1}{2}}$ (limite d'une composée).

d) $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{\dfrac{1}{4x^2+2}}$: soit $f(x)=\sqrt{u(x)}$ où $u(x)=\dfrac{1}{4x^2+2}$.

$\lim\limits_{x\to+\infty}\left(4x^2+2\right)=+\infty$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty}u(x)=0$ (passage à l'inverse).

On pose $X=u(x)$. $\lim\limits_{X\to 0}\sqrt{X}=0$ donc $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=0}$ (limite d'une composée).

e) $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x>1}} \sqrt{\dfrac{1}{x^2-1}}$: soit $f(x)=\sqrt{u(x)}$ où $u(x)=\dfrac{1}{x^2-1}$.

$\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x>1}} \left(x^2-1\right)=0^+$ (pour $x>1$, $x^2-1>0$) donc $\lim\limits_{x\to+\infty} u(x)=+\infty$ (passage à l'inverse).

On pose $X=u(x)$. $\lim\limits_{X\to+\infty} \sqrt{X}=+\infty$ donc $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty}$ (limite d'une composée).

f) $\lim\limits_{x\to+\infty} \cos\left(\dfrac{\pi x-1}{4x}\right)$: soit $f(x)=\cos\left[u(x)\right]$ où $u(x)=\dfrac{\pi x-1}{4x}$.

$\lim\limits_{x\to+\infty} u(x)=\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\pi x}{4x}=\dfrac{\pi}{4}$ (limite d'une fonction rationnelle en l'infini).

On pose $X=u(x)$. $\lim\limits_{X\to\frac{\pi}{4}} \cos X=\cos\dfrac{\pi}{4}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ donc $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\dfrac{\sqrt{2}}{2}}$ (limite d'une composée).

En cas d'indétermination

Exercice 14 :

a) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \dfrac{\sin x}{x}$: $\dfrac{\sin x}{x}=\sin x\times\dfrac{1}{x}$.

Or $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \sin x=0$ et $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \dfrac{1}{x}=+\infty$ donc par produit on a une forme indéterminée.

b) $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(x^2+1-\sqrt{x}\right)$:

$\lim\limits_{x\to+\infty} \left(x^2+1\right)=+\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(-\sqrt{x}\right)=-\infty$ donc par somme, on a une forme indéterminée.

c) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \dfrac{\sqrt{x+1}-1}{x}$: $\dfrac{\sqrt{x+1}-1}{x}=\left(\sqrt{x+1}-1\right)\times\dfrac{1}{x}$.

Or $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \left(\sqrt{x+1}-1\right)=0$ et $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \dfrac{1}{x}=+\infty$ donc par produit on a une forme indéterminée.

d) $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(\sqrt{x^2-4}-x\right)$:

$\lim\limits_{x\to+\infty} \left(\sqrt{x^2-4}\right)=+\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} (-x)=-\infty$ donc par somme, on a une forme indéterminée.

Exercice 15 :

1) $f(x)=x^2+1-\sqrt{x}$.

a) $x^2\left(1+\dfrac{1}{x^2}-\dfrac{1}{x\sqrt{x}}\right)=x^2+1-\dfrac{x^2}{x\sqrt{x}}=x^2+1-\dfrac{x}{\sqrt{x}}=x^2+1-\sqrt{x}$ car $x=\left(\sqrt{x}\right)^2$.

Donc $f(x)=x^2\left(1+\dfrac{1}{x^2}-\dfrac{1}{x\sqrt{x}}\right)$.

b) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{x^2}=0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(-\dfrac{1}{x\sqrt{x}}\right)=0$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(1+\dfrac{1}{x^2}-\dfrac{1}{x\sqrt{x}}\right)=1$

De plus $\lim\limits_{x\to+\infty} x^2 = +\infty$ donc par produit $\lim\limits_{x\to+\infty} x^2\left(1+\dfrac{1}{x^2}-\dfrac{1}{x\sqrt{x}}\right) = +\infty$.

Soit $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty}$.

2) $f(x) = \sqrt{x^2-4} - x$.

a) Pour tout réel $x \geq 2$,

$$f(x) = \sqrt{x^2-4} - x = \frac{\left(\sqrt{x^2-4}-x\right)\left(\sqrt{x^2-4}+x\right)}{\left(\sqrt{x^2-4}+x\right)} = \frac{x^2-4-x^2}{\sqrt{x^2-4}+x} = \frac{-4}{\sqrt{x^2-4}+x}.$$

b) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x^2-4\right) = +\infty$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{x^2-4} = +\infty$, et $\lim\limits_{x\to+\infty} x = +\infty$ donc par somme

$\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2-4}+x\right) = +\infty$.

On en déduit que $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{-4}{\sqrt{x^2-4}+x} = 0$. Donc $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0}$.

IV. Théorèmes de comparaison *Corrigé*

Exercice 16 :

a) $f(x) = x^2 + \sin x$:

On sait que pour tout x réel, $-1 \leq \sin x \leq 1$.

Donc pour tout x réel, $x^2 - 1 \leq f(x)$. Or $\lim\limits_{x\to+\infty}(x^2-1) = +\infty$, donc d'après les théorèmes de comparaison, on a : $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty}$.

b) $f(x) = \sin^2 x - x$:

On sait que pour tout x réel, $-1 \leq \sin x \leq 1$; donc $0 \leq \sin^2 x \leq 1$.

Donc pour tout x réel, $f(x) \leq 1 - x$. Or $\lim\limits_{x\to+\infty}(1-x) = -\infty$, donc d'après les théorèmes de comparaison, on a : $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -\infty}$.

Exercice 17 : f est une fonction définie sur **R** telle que, pour tout réel x, $5\ ;\ f(x)\ ;\ 8$.

La fonction g est définie sur $]-\infty\ ;0[$ par $g(x) = \dfrac{3f(x)-1}{x}$.

Pour tout $x < 0$, on a successivement :

$5 \leq f(x) \leq 8$

$15 \leq 3f(x) \leq 24$

$14 \leq 3f(x) - 1 \leq 23$

$\dfrac{14}{x} \geq \dfrac{3f(x)-1}{x} \geq \dfrac{23}{x}$ (on a divisé par $x < 0$)

$\dfrac{23}{x} \leq \dfrac{3f(x)-1}{x} \leq \dfrac{14}{x}$

Or, $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{23}{x} = 0$ et $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{14}{x} = 0$; donc d'après le théorème des gendarmes, on a : $\boxed{\lim\limits_{x\to-\infty} g(x) = 0}$.