LOGARITHME

I. Ensembles de définition *Corrigé*

Exercice 1 : L'ensemble de définition de la fonction ln est $\left]0;+\infty\right[$.

Notons D_f l'ensemble de définition de la fonction *f*.

a) $f(x)=\ln\left(x^2+1\right)$; *f* est définie si et seulement si $x^2+1>0$, ce qui est toujours le cas car x^2 ? 0 pour tout réel *x*. Donc $D_f=\mathbf{R}$.

b) $f(x)=\ln\left(3-x\right)$; *f* est définie si et seulement si $3-x>0$, c'est-à-dire $x<3$. $D_f=\left]-\infty;3\right[$.

c) $f(x)=\ln\left(2x+5\right)$; *f* est définie si et seulement si $2x+5>0$, soit $x>-\dfrac{5}{2}$. $D_f=\left]-\dfrac{5}{2};+\infty\right[$.

d) $f(x)=\ln\left(x^2-2x+2\right)$; $x\in D_f \Leftrightarrow x^2-2x+2>0$.

Étudions le signe du trinôme x^2-2x+2 : son discriminant est $\Delta=\left(-2\right)^2-4\times1\times2=-4<0$ donc x^2-2x+2 n'a pas de racine réelle ; il est donc du signe de *a* pour tout réel *x*, c'est-à-dire strictement positif. D'où $D_f=\mathbf{R}$.

e) $f(x)=\ln\left(\dfrac{1}{x-1}\right)$; $x\in D_f \Leftrightarrow \dfrac{1}{x-1}>0 \Leftrightarrow x-1>0$ (car un réel non nul a le même signe que son inverse), et $x-1>0 \Leftrightarrow x>1$. Donc $D_f=\left]1;+\infty\right[$.

f) $f(x)=\ln\left(1+e^x\right)$; pour tout réel *x*, $e^x>0$ donc $1+e^x>0$. $D_f=\mathbf{R}$

Exercice 2 : $f(x)=\ln\left(x^2+4x+3\right)$.

f est définie si et seulement si $x^2+4x+3>0$. Le trinôme x^2+4x+3 a pour racines -3 et -1 ; son signe est donné dans le tableau ci-dessous :

x	$-\infty$		-3		-1		$+\infty$
signe de x^2+4x+3		$+$	0	$-$	0	$+$	

Pour $x\in\left]-1;+\infty\right[$, $x^2+4x+3>0$ donc *f* est bien définie sur cet intervalle.

Exercice 3 : $f(x)=\ln\left(\dfrac{x+1}{x-1}\right)$ et $g(x)=\ln\left(x+1\right)-\ln\left(x-1\right)$.

$x\in D_f \Leftrightarrow \dfrac{x+1}{x-1}>0$;

$\boxed{D_f=\left]-\infty;-1\right[\cup\left]1;+\infty\right[}$.

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
signe de $x+1$		$-$	0	$+$		$+$	
signe de $x-1$		$-$		$-$	0	$+$	
signe de $\dfrac{x+1}{x-1}$		$+$	0	$-$	$\Vert$	$+$	

$x\in D_g \Leftrightarrow \begin{cases} x+1>0 \\ x-1>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x>-1 \\ x>1 \end{cases}$;

$\boxed{D_g=\left]1;+\infty\right[}$. *f* et *g* n'ont pas le même ensemble de définition.

On peut remarquer que, pour *x* appartenant à $\left]1;+\infty\right[$, *f* et *g* sont bien définies et $f(x)=g(x)$.

II. Calculs d'images ou simplification d'expressions	***Corrigé***

Exercice 4 : f est la fonction définie sur $]-3;3[$ par $f(x)=\ln\left(\dfrac{3-x}{3+x}\right)$.

$f(0)=\ln\left(\dfrac{3-0}{3+0}\right)=\ln\left(\dfrac{3}{3}\right)=\ln(1)=0$.

Exercice 5 : f est la fonction définie sur $]0;+\infty[$ par $f(x)=\dfrac{1+2\ln x}{x^2}$.

$f(1)=\dfrac{1+2\ln 1}{1^2}=\dfrac{1+2\times 0}{1}=1$; $f(\mathrm{e})=\dfrac{1+2\ln \mathrm{e}}{\mathrm{e}^2}=\dfrac{1+2\times 1}{\mathrm{e}^2}=\dfrac{3}{\mathrm{e}^2}$.

Exercice 6 : on sait que $\ln(\mathrm{e})=1$.

$\ln\left(\sqrt{\mathrm{e}}\right)=\dfrac{1}{2}\ln(\mathrm{e})=\dfrac{1}{2}$; $\ln\left(\dfrac{1}{\mathrm{e}}\right)=-\ln(\mathrm{e})=-1$; $\ln\left(\mathrm{e}^3\right)=3\ln(\mathrm{e})=3$;

$\ln\left(\dfrac{1}{\mathrm{e}^4}\right)=-\ln\left(\mathrm{e}^4\right)=-4\ln(\mathrm{e})=-4$.

Exercice 7 :

$A=\ln 8=\ln\left(2^3\right)=3\ln 2$; $B=\ln\left(\dfrac{1}{4}\right)=-\ln 4=-\ln\left(2^2\right)=-2\ln 2$;

$C=5\ln 4-\ln 32=5\ln\left(2^2\right)-\ln\left(2^5\right)=10\ln 2-5\ln 2=5\ln 2$.

Exercice 8 : f est la fonction définie sur **R** par : $f(x)=\ln\left(1+\mathrm{e}^x\right)$.

Pour tout réel x, $f(x)=\ln\left[\mathrm{e}^x\left(\dfrac{1}{\mathrm{e}^x}+1\right)\right]=\ln\left[\mathrm{e}^x\left(\mathrm{e}^{-x}+1\right)\right]=\ln\left(\mathrm{e}^x\right)+\ln\left(\mathrm{e}^{-x}+1\right)=x+\ln\left(1+\mathrm{e}^{-x}\right)$.

III. Résolution d'équations et d'inéquations	***Corrigé***

Équations

Exercice 9 :

a) $\ln(x+1)=0$. L'équation est définie pour $x+1>0$, c'est à dire $x>-1$; donc $D=\left]-1\,;+\infty\right[$.
Sur D, $\ln(x+1)=0 \Leftrightarrow \ln(x+1)=\ln 1 \Leftrightarrow x+1=1 \Leftrightarrow x=0$. $0\in D$, donc $\boxed{S=\{0\}}$.

b) $\ln(1-2x)=0$. L'équation est définie pour $1-2x>0$, c'est à dire $x<\dfrac{1}{2}$; donc $D=\left]-\infty\,;\dfrac{1}{2}\right[$.
Sur D, $\ln(1-2x)=0 \Leftrightarrow \ln(1-2x)=\ln 1 \Leftrightarrow 1-2x=1 \Leftrightarrow x=0$. $0\in D$, donc $\boxed{S=\{0\}}$.

c) $\ln(x-3)-\ln(x+1)=0$.
L'équation est définie pour $\begin{cases}x-3>0\\x+1>0\end{cases}$, c'est à dire $\begin{cases}x>3\\x>-1\end{cases}$; donc $D=\left]3\,;+\infty\right[$.
Sur D, $\ln(x-3)-\ln(x+1)=0 \Leftrightarrow \ln(x-3)=\ln(x+1) \Leftrightarrow x-3=x+1 \Leftrightarrow 0x=4$.
Cette équation n'a donc pas de solution : $\boxed{S=\varnothing}$.

d) $(\ln x)^2+5\ln x+6=0$. L'équation est définie pour $x>0$; donc $D=\left]\,0\,;+\infty\right[$.
Posons $\ln x = X$; l'équation s'écrit alors : $X^2+5X+6=0$.
C'est une équation du second degré dont le discriminant est $\Delta=25-4\times 6=1$.

Elle admet deux solutions réelles $X_1 = \dfrac{-5+1}{2} = -2$ et $X_2 = \dfrac{-5-1}{2} = -3$.

On résout alors $\ln x = -2$ et $\ln x = -3$; $\ln x = -2 \Leftrightarrow x = e^{-2}$ et $\ln x = -3 \Leftrightarrow x = e^{-3}$.

e^{-2} et e^{-3} sont des réels strictement positifs ; ce sont donc les deux solutions de l'équation $(\ln x)^2 + 5\ln x + 6 = 0$: $\boxed{S = \{e^{-3} ; e^{-2}\}}$

e) $\ln(x-5) = 1$. L'équation est définie pour $x - 5 > 0$, c'est à dire $x > 5$; donc $D =]5 \,;\, +\infty[$.

Sur D, $\ln(x-5) = 1 \Leftrightarrow \ln(x-5) = \ln e \Leftrightarrow x - 5 = e \Leftrightarrow x = 5 + e$. $5 + e \in D$, donc $\boxed{S = \{5+e\}}$.

f) $\ln(x-2) + \ln(3x-1) = \ln 2$.

L'équation est définie pour $\begin{cases} x - 2 > 0 \\ 3x - 1 > 0 \end{cases}$, c'est à dire $\begin{cases} x > 2 \\ x > \dfrac{1}{3} \end{cases}$: donc $D =]2 \,;\, +\infty[$.

Sur D, $\ln(x-2) + \ln(3x-1) = \ln 2 \Leftrightarrow \ln[(x-2)(3x-1)] = \ln 2$

et $\ln[(x-2)(3x-1)] = \ln 2 \Leftrightarrow 3x^2 - 7x + 2 = 2 \Leftrightarrow 3x^2 - 7x = 0 \Leftrightarrow 3x(x-7) = 0$.

Sur D, $\ln(x-2) + \ln(3x-1) = \ln 2 \Leftrightarrow x = 0$ ou $x = 7$. $0 \notin D$; $7 \in D$, donc $\boxed{S = \{7\}}$.

g) $3^x = 2$. Cette équation est définie sur **R**.

$3^x = 2 \Leftrightarrow e^{x \ln 3} = e^{\ln 2} \Leftrightarrow x \ln 3 = \ln 2 \Leftrightarrow x = \dfrac{\ln 3}{\ln 2}$. $\boxed{S = \left\{\dfrac{\ln 3}{\ln 2}\right\}}$.

Inéquations

Exercice 10 :

a) $\ln x < 0$. L'inéquation $\ln x < 0$ est définie sur $]0 \,;\, +\infty[$.

On sait que $\ln 1 = 0$, donc $\ln x < 0 \Leftrightarrow \ln x < \ln 1 \Leftrightarrow x < 1$, car la fonction ln est strictement croissante sur $]0 \,;\, +\infty[$. On a donc $\boxed{S =]0 \,;\, 1[}$.

b) $\ln x > 1$. L'inéquation $\ln x > 1$ est définie sur $]0 \,;\, +\infty[$.

On sait que $\ln e = 1$, donc $\ln x > 1 \Leftrightarrow \ln x > \ln e \Leftrightarrow x > e$, car la fonction ln est strictement croissante sur $]0 \,;\, +\infty[$. On a donc $\boxed{S =]e \,;\, +\infty[}$.

c) $\ln x ;\ 2$. L'inéquation $\ln x ;\ 2$ est définie sur $]0 \,;\, +\infty[$.

On sait que pour tout x réel, $\ln(e^x) = x$, donc $2 = \ln(e^2)$.

Donc $\ln x ;\ 2 \Leftrightarrow \ln x ;\ \ln(e^2) \Leftrightarrow x ;\ e^2$, car la fonction ln est strictement croissante sur $]0 \,;\, +\infty[$. On a donc $\boxed{S =]0 \,;\, e^2]}$.

d) $\ln(x+5) > 0$. L'inéquation $\ln(x+5) > 0$ est définie sur l'ensemble des réels x tels que $x + 5 > 0$, c'est à dire sur l'intervalle $]-5 \,;\, +\infty[$.

Sur $]-5 \,;\, +\infty[$, $\ln(x+5) > 0 \Leftrightarrow \ln(x+5) > \ln 1 \Leftrightarrow x + 5 > 1 \Leftrightarrow x > 4$. Donc $\boxed{S =]4 \,;\, +\infty[}$.

e) $\ln(1-x) < 3$. L'inéquation $\ln(1-x) < 3$ est définie sur l'ensemble des réels x tels que $1 - x > 0$.

$1 - x > 0 \Leftrightarrow x < 1$. Donc l'ensemble de définition est $]-\infty \,;\, 1[$.

Sur $]-\infty \,;\, 1[$, $\ln(1-x) < 3 \Leftrightarrow \ln(1-x) < \ln(e^3) \Leftrightarrow 1 - x < e^3 \Leftrightarrow x > 1 - e^3$.

L'ensemble des solutions est donc l'ensemble des réels de l'intervalle $]-\infty \,;\, 1[$ tels que $x > 1 - e^3$; c'est donc l'ensemble des réels vérifiant à la fois ($x < 1$ et $x > 1 - e^3$).

On a donc $\boxed{S =]1 - e^3 \,;\, 1[}$.

Exercice 11 :

a) $(\ln x)^2 + 5\ln x ? 0$. L'inéquation $(\ln x)^2 + 5\ln x ? 0$ est définie sur $]0\ ;+\infty[$.

$(\ln x)^2 + 5\ln x ? 0 \Leftrightarrow \ln x(\ln x + 5) ? 0$.

Étudions le signe de chacun des facteurs :

$\ln x = 0 \Leftrightarrow x = 1$ et $\ln x > 0 \Leftrightarrow x > 1$.

$\ln x + 5 = 0 \Leftrightarrow \ln x = -5 \Leftrightarrow x = \mathrm{e}^{-5}$

et $\ln x + 5 > 0 \Leftrightarrow \ln x > -5 \Leftrightarrow x > \mathrm{e}^{-5}$.

On a donc $\boxed{S =]0\ ; \mathrm{e}^{-5}] \cup [1\ ;+\infty[}$.

x	0		$\exp(-5)$		1		$+\infty$
$\ln(x)$	‖	$-$		$-$	0	$+$	
$\ln(x)+5$	‖	$-$	0	$+$		$+$	
$\ln(x)(\ln(x)+5)$	‖	$+$	0	$-$	0	$+$	

b) $(\ln x)^2 - 2\ln x - 3 ? 0$. L'inéquation $(\ln x)^2 - 2\ln x - 3 ? 0$ est définie sur $]0\ ;+\infty[$.

Factorisons $(\ln x)^2 - 2\ln x - 3$. Pour cela, posons $X = \ln x$.

On obtient alors le trinôme $X^2 - 2X - 3$ dont le discriminant est $\Delta = 16$; ce trinôme admet deux racines réelles $X_1 = \dfrac{2+4}{2} = 3$ et $X_2 = \dfrac{2-4}{2} = -1$. On a donc $X^2 - 2X - 3 = (X-3)(X+1)$; on en déduit $(\ln x)^2 - 2\ln x - 3 = (\ln x - 3)(\ln x + 1)$.

Étudions le signe de chaque facteur :

$\ln x - 3 = 0 \Leftrightarrow \ln x = 3 \Leftrightarrow x = \mathrm{e}^3$

et $\ln x - 3 > 0 \Leftrightarrow \ln x > 3 \Leftrightarrow x > \mathrm{e}^3$.

$\ln x + 1 = 0 \Leftrightarrow \ln x = -1 \Leftrightarrow x = \mathrm{e}^{-1}$

et $\ln x + 1 > 0 \Leftrightarrow \ln x > -1 \Leftrightarrow x > \mathrm{e}^{-1}$.

On a donc $\boxed{S =]0\ ; \mathrm{e}^{-1}] \cup [\mathrm{e}^3\ ;+\infty[}$.

x	0		$\exp(-1)$		$\exp(3)$		$+\infty$
$\ln(x)-3$	‖	$-$		$-$	0	$+$	
$\ln(x)+1$	‖	$-$	0	$+$		$+$	
$(\ln(x)-3)(\ln(x)+1)$	‖	$+$	0	$-$	0	$+$	

c) $\ln(x+1) + \ln(2x-1)\ ; \ \ln 2$.

Cette inéquation est définie sur l'ensemble des réels x tels que $\begin{cases} x+1>0 \\ 2x-1>0 \end{cases}$.

$\begin{cases} x+1>0 \\ 2x-1>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x>-1 \\ x>\dfrac{1}{2} \end{cases}$. Donc l'ensemble de définition de l'inéquation est $\left]\dfrac{1}{2}\ ;+\infty\right[$.

On sait que pour tous réels strictement positifs a et b, $\ln a\ ; \ \ln b \Leftrightarrow a\ ; \ b$. On transforme donc l'inéquation pour la mettre sous cette forme.

Pour tout x de $\left]\dfrac{1}{2}\ ;+\infty\right[$, $\ln(x+1)+\ln(2x-1) = \ln[(x+1)(2x-1)]$.

Sur $\left]\dfrac{1}{2}\ ;+\infty\right[$, $\ln(x+1)+\ln(2x-1)\ ; \ \ln 2 \Leftrightarrow \ln[(x+1)(2x-1)]\ ; \ \ln 2 \Leftrightarrow (x+1)(2x-1)\ ; \ 2$

et $(x+1)(2x-1)\ ; \ 2 \Leftrightarrow 2x^2+x-3\ ; \ 0$. Le trinôme $2x^2+x-3$ a pour discriminant $\Delta = 25$; il a deux racines réelles $x_1 = \dfrac{-1+5}{4} = 1$ et $x_2 = \dfrac{-1-5}{4} = -\dfrac{3}{2}$. $2x^2+x-3\ ; \ 0 \Leftrightarrow x \in \left[-\dfrac{3}{2}\ ;1\right]$.

L'ensemble des solutions de l'inéquation est donc l'ensemble des réels de $\left]\dfrac{1}{2}\ ;+\infty\right[$, vérifiant $x \in \left[-\dfrac{3}{2}\ ;1\right]$. Donc $\boxed{S = \left]\dfrac{1}{2}\ ;1\right]}$.

Exercice 12 :

Déterminons le plus petit entier naturel n tel que $(0{,}9)^n < 0{,}5$.

On sait que, pour tout réel strictement positif a et pour tout entier n, $\ln(a^n) = n\ln a$;

de plus, la fonction ln est strictement croissante sur $]0\,;+\infty[$. Donc :
$(0{,}9)^n < 0{,}5 \Leftrightarrow \ln\left[(0{,}9)^n\right] < \ln 0{,}5 \Leftrightarrow n\ln 0{,}9 < \ln 0{,}5$.

Or $0{,}9 < 1$, donc $\ln 0{,}9 < 0$, d'où : $n\ln 0{,}9 < \ln 0{,}5 \Leftrightarrow n > \dfrac{\ln 0{,}5}{\ln 0{,}9}$.

Une valeur approchée de $\dfrac{\ln 0{,}5}{\ln 0{,}9}$ est 6,58. Le plus entier cherché est donc $\boxed{n=7}$.

IV. Dérivation *Corrigé*

$$\mathbf{\ln'(x) = \frac{1}{x}}$$

Exercice 13 :

a) $f(x) = x + \ln x$: f est dérivable sur $]0;+\infty[$ (somme de fonctions dérivables).

$\forall x \in\,]0;+\infty[\,,\ f'(x) = 1 + \dfrac{1}{x}$.

b) $f(x) = x\ln x$: f est dérivable sur $]0;+\infty[$ (produit de fonctions dérivables).

$\forall x \in\,]0;+\infty[\,,\ f'(x) = 1\times \ln x + x\times\dfrac{1}{x} = \ln x + 1$.

c) $f(x) = \dfrac{\ln x}{x}$: f est dérivable sur $]0;+\infty[$ (quotient de fonctions dérivables).

$\forall x \in\,]0;+\infty[\,,\ f'(x) = \dfrac{\frac{1}{x}\times x - \ln x \times 1}{x^2} = \dfrac{1-\ln x}{x^2}$.

d) $f(x) = \ln x - \dfrac{x^2}{2}$: f est dérivable sur $]0;+\infty[$ (somme de fonctions dérivables).

$\forall x \in\,]0;+\infty[\,,\ f'(x) = \dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{2}\times 2x = \dfrac{1}{x} - x = \dfrac{1-x^2}{x} = \dfrac{(1-x)(1+x)}{x}$.

e) $f(x) = \dfrac{\ln x - 5x}{3}$: f est dérivable sur $]0;+\infty[$ (somme de fonctions dérivables).

$\forall x \in\,]0;+\infty[\,,\ f'(x) = \dfrac{1}{3}\left(\dfrac{1}{x} - 5\right) = \dfrac{1}{3}\times\dfrac{1-5x}{x} = \dfrac{1-5x}{3x}$.

Exercice 14 :

a) $f(x) = (\ln x)^2$: f est dérivable sur $]0;+\infty[$ (carré d'une fonction dérivable).

$\forall x \in\,]0;+\infty[\,,\ f(x) = (u(x))^2$ où $u(x) = \ln x$

donc $f'(x) = 2u(x)\times u'(x) = 2\ln x \times \dfrac{1}{x} = \dfrac{2\ln x}{x}$.

b) $f(x) = \dfrac{1}{x} + \ln x$: f est dérivable sur $]0;+\infty[$ (somme de fonctions dérivables).

$\forall x \in\,]0;+\infty[\,,\ f'(x) = -\dfrac{1}{x^2} + \dfrac{1}{x} = \dfrac{x-1}{x^2}$.

c) $f(x) = \mathrm{e}^{-x}\ln x$: f est dérivable sur $]0;+\infty[$ (produit de fonctions dérivables).

$\forall x \in\,]0;+\infty[\,,\ f'(x) = -\mathrm{e}^{-x}\times \ln x + \mathrm{e}^{-x}\times\dfrac{1}{x} = \mathrm{e}^{-x}\left(\dfrac{1}{x} - \ln x\right) = \dfrac{\mathrm{e}^{-x}(1 - x\ln x)}{x}$.

d) $f(x) = \mathrm{e}^{x\ln x}$: f est dérivable sur $]0;+\infty[$ (produit et composée de fonctions dérivables).

$\forall x \in \left]0;+\infty\right[$, $f(x)=\mathrm{e}^{u(x)}$ où $u(x)=x\ln x$

donc $f'(x)=u'(x)\mathrm{e}^{u(x)}=(1+\ln x)\mathrm{e}^{x\ln x}$.

Exercice 15 :

$f(x)=\dfrac{1}{\ln x}$: *f* est dérivable sur $\left]0;1\right[$ et sur $\left]1;+\infty\right[$ (inverse d'une fonction dérivable).

$\forall x \in \left]0;1\right[\cup\left]1;+\infty\right[$, $f(x)=\dfrac{1}{u(x)}$ où $u(x)=\ln x$ donc $f'(x)=-\dfrac{u'(x)}{\left(u(x)\right)^2}=-\dfrac{\frac{1}{x}}{(\ln x)^2}=-\dfrac{1}{x(\ln x)^2}$;

$f(\mathrm{e})=\dfrac{1}{\ln \mathrm{e}}=1$ et $f'(\mathrm{e})=-\dfrac{1}{\mathrm{e}(\ln \mathrm{e})^2}=-\dfrac{1}{\mathrm{e}}$.

La tangente à la courbe représentative de *f* au point d'abscisse e a pour équation :

$y=f(\mathrm{e})+f'(\mathrm{e})(x-\mathrm{e})$ soit $y=1+\dfrac{1}{\mathrm{e}}(x-\mathrm{e})$ soit $y=\dfrac{x}{\mathrm{e}}$.

$$\boldsymbol{(\ln u)'=\frac{u'}{u}}$$

Exercice 16 :

a) $f(x)=\ln\left(x^2+1\right)$ sur $\mathbf{R}$; $f(x)$ est de la forme $\ln\left(u(x)\right)$ avec $u(x)=x^2+1$.
u est dérivable et strictement positive sur **R** donc *f* est dérivable sur **R**
et pour tout réel *x*, $f'(x)=\dfrac{u'(x)}{u(x)}$. $u'(x)=2x$ donc $\boxed{f'(x)=\dfrac{2x}{x^2+1}}$.

b) $f(x)=\ln\left(1+\mathrm{e}^{-x}\right)$ sur $\mathbf{R}$; $f(x)$ est de la forme $\ln\left(u(x)\right)$ avec $u(x)=1+\mathrm{e}^{-x}$.
u est dérivable et strictement positive sur **R** donc *f* est dérivable sur **R**
et pour tout réel *x*, $f'(x)=\dfrac{u'(x)}{u(x)}$. $u'(x)=-\mathrm{e}^{-x}$ donc $\boxed{f'(x)=\dfrac{-\mathrm{e}^{-x}}{1+\mathrm{e}^{-x}}}$.

c) $f(x)=\ln\left(\dfrac{x+1}{x-1}\right)$ sur $\left]-\infty;-1\right[\cup\left]1;+\infty\right[$; $f(x)$ est de la forme $\ln\left(u(x)\right)$ avec $u(x)=\dfrac{x+1}{x-1}$.
u est dérivable et strictement positive sur $\left]-\infty;-1\right[\cup\left]1;+\infty\right[$ donc *f* est dérivable sur $\left]-\infty;-1\right[\cup\left]1;+\infty\right[$ et pour tout réel *x* de $\left]-\infty;-1\right[\cup\left]1;+\infty\right[$, $f'(x)=\dfrac{u'(x)}{u(x)}$.

$u'(x)=\dfrac{1\times(x-1)-(x+1)\times 1}{(x-1)^2}=\dfrac{x-1-x-1}{(x-1)^2}=\dfrac{-2}{(x-1)^2}$.

Donc $f'(x)=\dfrac{\frac{-2}{(x-1)^2}}{\frac{x+1}{x-1}}=\dfrac{-2}{(x-1)^2}\times\dfrac{x-1}{x+1}$, soit $\boxed{f'(x)=\dfrac{-2}{(x-1)(x+1)}}$

d) $f(x)=\ln(\ln x)$ sur $\left]1;+\infty\right[$; $f(x)$ est de la forme $\ln\left(u(x)\right)$ avec $u(x)=\ln x$.
u est dérivable et strictement positive sur $\left]1;+\infty\right[$ donc *f* est dérivable sur $\left]1;+\infty\right[$
et pour tout réel *x* de $\left]1;+\infty\right[$, $f'(x)=\dfrac{u'(x)}{u(x)}$. $u'(x)=\dfrac{1}{x}$ donc $\boxed{f'(x)=\dfrac{\frac{1}{x}}{\ln x}=\dfrac{1}{x\ln x}}$.

e) $f(x)=(x-1)\ln(2-x)$ sur $\left]-\infty;2\right[$;
$f(x)$ est de la forme $u(x)\times v(x)$ avec $u(x)=x-1$ et $v(x)=\ln(2-x)$;

$v(x)$ est de la forme $\ln\left(w(x)\right)$ avec $w(x)=2-x$.

w est dérivable et strictement positive sur $]-\infty\,;2\,[$ donc v est dérivable sur $]-\infty\,;2\,[$

et pour tout réel x de $]-\infty\,;2\,[$, $v'(x)=\dfrac{w'(x)}{w(x)}=\dfrac{-1}{2-x}$.

f est dérivable sur $]-\infty\,;2\,[$ et pour tout réel x de $]-\infty\,;2\,[$,

$f'(x)=u'(x)\times v(x)+u(x)\times v'(x)=1\times\ln(2-x)+(x-1)\times\dfrac{-1}{(2-x)}$ soit $\boxed{f'(x)=\ln(2-x)-\dfrac{x-1}{2-x}}$.

f) $f(x)=\dfrac{\ln(x+1)}{\ln x}$ sur $]0;1[\cup]1;+\infty[$;

$f(x)$ est de la forme $\dfrac{u(x)}{v(x)}$ avec $u(x)=\ln(x+1)$ et $v(x)=\ln x$.

Sur $]0;1[\cup]1;+\infty[$, u et v sont dérivables et $v(x)\neq 0$ donc f est dérivable sur $]0;1[\cup]1;+\infty[$ et pour tout x de $]0;1[\cup]1;+\infty[$,

$$f'(x)=\frac{u'(x)v(x)-u(x)v'(x)}{v^2(x)}=\frac{\frac{1}{x+1}\times\ln x-\ln(x+1)\times\frac{1}{x}}{(\ln x)^2}=\frac{\frac{x\ln x-(x+1)\ln(x+1)}{x(x+1)}}{(\ln x)^2}$$

d'où $\boxed{f'(x)=\dfrac{x\ln x-(x+1)\ln(x+1)}{x(x+1)(\ln x)^2}}$.

Exercice 17 :

f est la fonction définie sur $]0;+\infty[$ par : $f(x)=x-\ln\left(2+\dfrac{1}{x}\right)$.

Une équation de la tangente à la courbe représentant f au point d'abscisse 1 est : $y=f'(1)(x-1)+f(1)$.

$$f'(x)=1-\frac{-\frac{1}{x^2}}{2+\frac{1}{x}}=1-\frac{\frac{-1}{x^2}}{\frac{2x+1}{x}}=1+\frac{1}{x^2}\times\frac{x}{2x+1}=1+\frac{1}{x(2x+1)}=\frac{2x^2+x+1}{x(2x+1)}$$

Donc $f'(1)=\dfrac{4}{3}$ et $f(1)=1-\ln 3$.

Une équation de la tangente demandée est donc : $y=\dfrac{4}{3}x-\dfrac{4}{3}+1-\ln 3$ soit $\boxed{y=\dfrac{4}{3}x-\dfrac{1}{3}-\ln 3}$.

V. Autour des limites *Corrigé*

Exercice 18 :

a) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln x}{x}$: $\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to+\infty}\ln x=+\infty\\ \lim\limits_{x\to+\infty}x=+\infty\end{array}\right\}$ Le quotient est une forme indéterminée,

mais on a vu en cours que $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln x}{x}=0$.

b) $\lim\limits_{x\to+\infty}x\ln x$: $\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to+\infty}x=+\infty\\ \lim\limits_{x\to+\infty}\ln x=+\infty\end{array}\right\}\xrightarrow{\text{produit}}\lim\limits_{x\to+\infty}x\ln x=+\infty$.

c) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\x>0}} \dfrac{\ln x}{x}$: $\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{\substack{x\to 0\\x>0}} x = 0^+\\ \lim\limits_{\substack{x\to 0\\x>0}} \ln x = -\infty\end{array}\right\} \xrightarrow{\text{quotient}} \lim\limits_{\substack{x\to 0\\x>0}} \dfrac{\ln x}{x} = -\infty.$

d) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\x>0}} x\ln x$: $\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{\substack{x\to 0\\x>0}} x = 0\\ \lim\limits_{\substack{x\to 0\\x>0}} \ln x = -\infty\end{array}\right\}$ Le produit est une forme indéterminée,

mais on a vu en cours que $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\x>0}} x\ln x = 0$.

e) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln(1+x)}{x}$: $\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to 0} \ln(1+x) = \ln 1 = 0\\ \lim\limits_{x\to 0} x = 0\end{array}\right\}$ Le quotient est une forme indéterminée,

mais $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln(1+x)}{x} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln(1+x)-\ln 1}{x} = \ln'1 = \dfrac{1}{1} = 1$.

f) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\ln(1+x)}{x}$: $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\ln(1+x)}{x} = \dfrac{\ln(1+1)}{1} = \ln 2.$

g) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\ln x}{x-1}$: $\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to 1} \ln x = \ln 1 = 0\\ \lim\limits_{x\to 1} x-1 = 0\end{array}\right\}$ Le quotient est une forme indéterminée,

mais $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\ln x}{x-1} = \lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\ln x - \ln 1}{x-1} = \ln'1 = \dfrac{1}{1} = 1$.

h) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln x}{x-1}$: $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln(1+x)}{x-1} = \dfrac{\ln 1}{-1} = 0.$

<u>Exercice 19</u> :

a) $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(x^2-5x+3\right)\ln x$: $\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to+\infty} \left(x^2-5x+3\right) = +\infty\\ \lim\limits_{x\to+\infty} \ln x = -\infty\end{array}\right\} \xrightarrow{\text{produit}} \lim\limits_{x\to+\infty} \left(x^2-5x+3\right)\ln x = -\infty.$

b) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\x>0}} \left(\dfrac{1}{x} - 3\ln x\right)$: $\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{\substack{x\to 0\\x>0}} \dfrac{1}{x} = +\infty\\ \lim\limits_{\substack{x\to 0\\x>0}} \ln x = -\infty \Rightarrow \lim\limits_{\substack{x\to 0\\x>0}} -3\ln x = +\infty\end{array}\right\} \xrightarrow{\text{somme}} \lim\limits_{x\to+\infty} \left(\dfrac{1}{x} - 3\ln x\right) = +\infty.$

e) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\x<0}} \ln\left(1-\mathrm{e}^x\right)$: si $x<0$ alors $1-\mathrm{e}^x > 0$.

$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{\substack{x\to 0\\x<0}} \mathrm{e}^x = \mathrm{e}^0 = 1 \Rightarrow \lim\limits_{\substack{x\to 0\\x<0}} \left(1-\mathrm{e}^x\right) = 1-1 = 0^+\\ \lim\limits_{\substack{u\to 0\\u>0}} \ln u = -\infty\end{array}\right\} \xrightarrow{\text{composée}} \lim\limits_{\substack{x\to 0\\x>0}} \ln\left(1-\mathrm{e}^x\right) = -\infty$.

<u>Exercice 20</u> :

a) $f(x) = 1-x^2-\ln x$ sur $]0;+\infty[$:

Limite en $+\infty$: $\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to+\infty} 1-x^2 = -\infty\\ \lim\limits_{x\to+\infty} \ln x = +\infty\end{array}\right\} \xrightarrow{\text{différence}} \lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$.

Limite à droite en 0 : $\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to 0} 1-x^2=1\\ \lim\limits_{x\to 0} \ln x=-\infty\end{array}\right\} \xrightarrow{\text{différence}} \lim\limits_{x\to 0} f(x)=+\infty$.

b) $f(x)=\dfrac{\ln x}{x}-x+2$ sur $]0;+\infty[$:

Limite en $+\infty$: $\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln x}{x}=0\\ \lim\limits_{x\to+\infty} -x+2=-\infty\end{array}\right\} \xrightarrow{\text{somme}} \lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=-\infty$.

Limite à droite en 0 : $\left.\begin{array}{l}\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{\substack{x\to 0\\x>0}} \ln x=-\infty\\ \lim\limits_{\substack{x\to 0\\x>0}} x=0^+\end{array}\right\} \xrightarrow{\text{quotient}} \lim\limits_{\substack{x\to 0\\x>0}} \dfrac{\ln x}{x}=-\infty\\ \lim\limits_{x\to 0} -x+2=2\end{array}\right\} \xrightarrow{\text{somme}} \lim\limits_{\substack{x\to 0\\x>0}} f(x)=-\infty$.

c) $f(x)=\ln\left(x^2+4x+3\right)$ sur $]-1;+\infty[$:

Le trinôme x^2+4x+3 a pour racines -3 et -1.

Il est strictement positif sur $]-\infty;-3]\cup]-1;+\infty[$, donc sur $]-1;+\infty[$.

Limite en $+\infty$: $\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to+\infty} \left(x^2+4x+3\right)=+\infty\\ \lim\limits_{u\to+\infty} \ln u=+\infty\end{array}\right\} \xrightarrow{\text{composée}} \lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$.

Limite à droite en -1 : $\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to-1} \left(x^2+4x+3\right)=0\\ \lim\limits_{\substack{u\to 0\\u>0}} \ln u=-\infty\end{array}\right\} \xrightarrow{\text{composée}} \lim\limits_{\substack{x\to-1\\x>-1}} f(x)=-\infty$.

e) $f(x)=\ln\left(1+\mathrm{e}^x\right)$ sur $\mathbf{R}$:

Limite en $+\infty$: $\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to+\infty} \left(1+\mathrm{e}^x\right)=+\infty\\ \lim\limits_{u\to+\infty} \ln u=+\infty\end{array}\right\} \xrightarrow{\text{composée}} \lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$.

Limite en $-\infty$: $\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to-\infty} \left(1+\mathrm{e}^x\right)=1\\ \lim\limits_{u\to 1} \ln u=\ln 1=0\end{array}\right\} \xrightarrow{\text{composée}} \lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=0$.

f) $f(x)=(\ln x)^2-\ln x$ sur $]0;+\infty[$: $f(x)=(\ln x)^2-\ln x=\ln x[1+\ln x]$.

Limite en $+\infty$: $\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to+\infty} \ln x=+\infty\\ \lim\limits_{x\to+\infty} (1+\ln x)=+\infty\end{array}\right\} \xrightarrow{\text{somme}} \lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$.

Limite à droite en 0 : $\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{\substack{x\to 0\\x>0}} \ln x=-\infty\\ \lim\limits_{\substack{x\to 0\\x>0}} (1+\ln x)=-\infty\end{array}\right\} \xrightarrow{\text{somme}} \lim\limits_{\substack{x\to 0\\x>0}} f(x)=-\infty$.

Exercice 21 :

1. $f(x)=x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)$ sur $]0;+\infty[$.

   Limite à droite en 0 : on a $\frac{\ln(1+x)}{x^2}=\frac{\ln(1+x)}{x}\times\frac{1}{x}$.

$$\left.\begin{aligned}&\lim_{x\to0}\frac{\ln(1+x)}{x}=1\ (\text{cours})\\&\lim_{\substack{x\to0\\x>0}}\frac{1}{x}=+\infty\end{aligned}\right\}\xrightarrow{\text{produit}}\lim_{\substack{x\to0\\x>0}}\frac{\ln(1+x)}{x^2}=+\infty.$$

   Limite en $+\infty$: on a $x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)=\frac{\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}{\frac{1}{x}}$.

$$\left.\begin{aligned}&\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}=0\\&\lim_{u\to0}\frac{\ln(1+u)}{u}=1\end{aligned}\right\}\xrightarrow{\text{Composée}}x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)=\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}{\frac{1}{x}}=1.$$

2. On cherche à déterminer la limite, pour $n\in\mathbf{N}^*$, de $\frac{\ln x}{\sqrt[n]{x}}=\frac{\ln\sqrt[n]{x}^{\,n}}{\sqrt[n]{x}}=n\frac{\ln\sqrt[n]{x}}{\sqrt[n]{x}}$ en $+\infty$:

$$\left.\begin{aligned}&\lim_{x\to+\infty}\sqrt[n]{x}=+\infty\\&\lim_{u\to+\infty}\frac{\ln u}{u}=0\ (\text{cours})\end{aligned}\right\}\xrightarrow{\text{Composée}}\lim_{x\to+\infty}n\frac{\ln\sqrt[n]{x}}{\sqrt[n]{x}}=+\infty.$$

Exercice 22 : f est la fonction définie sur $]0;+\infty[$ par : $f(x)=5-x-2\frac{\ln x}{x}$.

On note (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé.

a) Limite de f en 0 :

   $\lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}}(5-x)=5$;

   $\lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}}\ln x=-\infty$ et $\lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}}\frac{1}{x}=+\infty$ donc $\lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}}\frac{\ln x}{x}=-\infty$, ce qui donne $\lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}}\left(-2\frac{\ln x}{x}\right)=+\infty$.

   D'où $\boxed{\lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}}f(x)=-\infty}$.

   Limite de f en $+\infty$:

   $\lim\limits_{x\to+\infty}(5-x)=-\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(-2\frac{\ln x}{x}\right)=0$ car $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x}=0$ (cours).

   D'où $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=-\infty}$.

b) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[f(x)-(5-x)\right]=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(-2\frac{\ln x}{x}\right)=0$.

   Donc la courbe (C) admet comme asymptote oblique la droite Δ d'équation $\underline{y=5-x}$

c) Pour étudier la position de la courbe (C) par rapport à la droite Δ, on étudie le signe de la différence $d(x)=\left[f(x)-(5-x)\right]$, c'est-à-dire le signe de $-2\frac{\ln x}{x}$ sur $]0;+\infty[$.

x	0	1	$+\infty$
Signe de $\ln x$	$-$	0	$+$
Signe de $d(x)$	$+$	0	$-$
Position relative de (C) et Δ	(C) au dessus de Δ	I	(C) au dessous de Δ

(I désigne le point d'intersection entre (C) et Δ).

Exercice 23 : **ROC**

On rappelle que la fonction ln est définie et dérivable sur $]0;+\infty[$, *positive sur* $[1,+\infty[$, *et a pour dérivée la fonction inverse.*

f est la fonction définie sur $]0;+\infty[$ par $f(x)=\sqrt{x}-\ln x$.

1. La fonction *f* est dérivable sur $]0;+\infty[$ comme somme de deux fonctions dérivables sur $]0;+\infty[$.

   $f'(x)=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}-\dfrac{1}{x}=\dfrac{2\times\sqrt{x}}{2\sqrt{x}\times\sqrt{x}}-\dfrac{2}{2x}$ donc $f'(x)=\dfrac{\sqrt{x}-2}{2x}$.

   Sur $]0;4[$ la fonction *f* est décroissante et sur $[4;+\infty[$ la fonction *f* est croissante.

   Elle admet un minimum pour $x=4$ qui vaut $f(4)=\sqrt{4}-\ln 4=2-\ln 4$.

2. Le minimum de la fonction *f* est $f(4)\approx 0,613$. Donc pour tous réels x, $f(x)>0$.

   Pour tous réels x de $]1;+\infty[$, on a $\sqrt{x}-\ln x>0$ donc $\sqrt{x}>\ln x$.

   De plus, pour tous réels x de $]1;+\infty[$, $\ln x>0$ donc $0<\ln x<\sqrt{x}$.

   Comme x est positif, on ne change pas le sens de l'inégalité en divisant par x.

   Pour tous réels x de $]1;+\infty[$, on a $0<\dfrac{\ln x}{x}<\dfrac{\sqrt{x}}{x}$.

3. $\lim\limits_{x\to+\infty} 0=0$, $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{x}}{x}=0$ et, pour tous réels x de $]1;+\infty[$, $0<\dfrac{\ln x}{x}<\dfrac{\sqrt{x}}{x}$.

   D'après le théorème des gendarmes, $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln x}{x}=0$.