LOGARITHME

I. Ensembles de définition

Exercice 1 : Déterminer l'ensemble de définition de la fonction f telle que :

a) $f(x)=\ln\left(x^2+1\right)$ b) $f(x)=\ln(3-x)$ c) $f(x)=\ln(2x+5)$

d) $f(x)=\ln\left(x^2-2x+2\right)$ e) $f(x)=\ln\left(\dfrac{1}{x-1}\right)$ f) $f(x)=\ln\left(1+\mathrm{e}^x\right)$

Exercice 2 : Montrer que, sur l'intervalle $\left]-1;+\infty\right[$, la fonction f telle que $f(x)=\ln\left(x^2+4x+3\right)$ est bien définie.

Exercice 3 : Les fonctions f et g telles que $f(x)=\ln\left(\dfrac{x+1}{x-1}\right)$ et $g(x)=\ln(x+1)-\ln(x-1)$ ont-elles le même ensemble de définition ?

II. Calculs d'images ou simplification d'expressions

Exercice 4 : Soit f la fonction définie sur $\left]-3;3\right[$ par $f(x)=\ln\left(\dfrac{3-x}{3+x}\right)$. Calculer $f(0)$.

Exercice 5 : Soit f la fonction définie sur $\left]0;+\infty\right[$ par $f(x)=\dfrac{1+2\ln x}{x^2}$. Calculer $f(1)$ et $f(\mathrm{e})$.

Exercice 6 : Simplifier l'écriture de : $\ln\left(\sqrt{\mathrm{e}}\right)$; $\ln\left(\dfrac{1}{\mathrm{e}}\right)$; $\ln\left(\mathrm{e}^3\right)$; $\ln\left(\dfrac{1}{\mathrm{e}^4}\right)$.

Exercice 7 : Exprimer à l'aide de $\ln 2$: $A=\ln 8$; $B=\ln\left(\dfrac{1}{4}\right)$; $C=5\ln 4-\ln 32$.

Exercice 8 : Soit f la fonction définie sur **R** par : $f(x)=\ln\left(1+\mathrm{e}^x\right)$.

Montrer que, pour tout réel x, $f(x)=x+\ln\left(1+\mathrm{e}^{-x}\right)$.

III. Résolution d'équations et d'inéquations

Équations

Exercice 9 : Résoudre les équations suivantes :

a) $\ln(x+1)=0$ b) $\ln(1-2x)=0$ c) $\ln(x-3)-\ln(x+1)=0$

d) $(\ln x)^2+5\ln x+6=0$ (indication : poser $X=\ln x$)

e) $\ln(x-5)=1$ f) $\ln(x-2)+\ln(3x-1)=\ln 2$ g) $3^x=2$

Inéquations

Exercice 10 : Résoudre dans **R** les inéquations suivantes :

a) $\ln x < 0$ b) $\ln x > 1$ c) $\ln x ;\ 2$ d) $\ln(x+5) > 0$ e) $\ln(1-x) < 3$

Exercice 11 : Résoudre dans **R** les inéquations suivantes :

a) $(\ln x)^2 + 5\ln x\ ?\ 0$ b) $(\ln x)^2 - 2\ln x - 3\ ?\ 0$ c) $\ln(x+1) + \ln(2x-1) ;\ \ln 2$

Exercice 12 : Déterminer le plus petit entier naturel n tel que $(0,9)^n < 0,5$.

IV. Dérivation

$$\mathbf{\ln'(x) = \frac{1}{x}}$$

Exercice 13 : Dériver la fonction *f* définie sur $]0;+\infty[$ ci-dessous et mettre la dérivée sous une forme adaptée à l'étude de son signe :

a) $f(x) = x + \ln x$ b) $f(x) = x\ln x$ c) $f(x) = \dfrac{\ln x}{x}$ d) $f(x) = \ln x - \dfrac{x^2}{2}$

e) $f(x) = \dfrac{\ln x - 5x}{3}$

Exercice 14 : Dériver la fonction *f* définie sur $]0;+\infty[$ par :

a) $f(x) = (\ln x)^2$ b) $f(x) = \dfrac{1}{x} + \ln x$ c) $f(x) = \mathrm{e}^{-x}\ln x$ d) $f(x) = \mathrm{e}^{x\ln x}$

Exercice 15 :

On considère la fonction *f* définie sur $]0;1[\cup]1;+\infty[$ par : $f(x) = \dfrac{1}{\ln x}$.

Déterminer l'équation réduite de la tangente à la courbe représentative de *f* au point d'abscisse e.

$$\mathbf{(\ln u)' = \frac{u'}{u}}$$

Exercice 16 : Dériver la fonction *f* définie par :

a) $f(x) = \ln\left(x^2+1\right)$ sur **R** b) $f(x) = \ln\left(1+\mathrm{e}^{-x}\right)$ sur **R**

c) $f(x) = \ln\left(\dfrac{x+1}{x-1}\right)$ sur $]-\infty;-1[\cup]1;+\infty[$ d) $f(x) = \ln(\ln x)$ sur $]1;+\infty[$

e) $f(x) = (x-1)\ln(2-x)$ sur $]-\infty;2[$ f) $f(x) = \dfrac{\ln(x+1)}{\ln x}$ sur $]0;1[\cup]1;+\infty[$

Exercice 17 :

On considère la fonction *f* définie sur $]0;+\infty[$ par : $f(x) = x - \ln\left(2+\dfrac{1}{x}\right)$.

Déterminer l'équation réduite de la tangente à la courbe représentative de *f* au point d'abscisse 1.

V. Autour des limites

Exercice 18 :

1. Parmi les limites suivantes, indiquer celles qui correspondent à des formes indéterminées :

a) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln x}{x}$ b) $\lim\limits_{x\to+\infty} x\ln x$ c) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \dfrac{\ln x}{x}$ d) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} x\ln x$

e) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln(1+x)}{x}$ f) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\ln(1+x)}{x}$ g) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\ln x}{x-1}$ h) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln x}{x-1}$

2. a) Pour les formes indéterminées, donner la valeur de la limite (résultat de cours).
   b) Pour les autres formes, déterminer la limite.

Exercice 19 : Déterminer les limites suivantes :

a) $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(x^2-5x+3\right)\ln x$ b) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \left(\dfrac{1}{x}-3\ln x\right)$ c) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x<0}} \ln\left(1-\mathrm{e}^x\right)$

Exercice 20 : Déterminer les limites demandées pour la fonction f définie par :

a) $f(x)=1-x^2-\ln x$ sur $]0;+\infty[$: limites en $+\infty$ et en 0 ;

b) $f(x)=\dfrac{\ln x}{x}-x+2$ sur $]0;+\infty[$: limites en $+\infty$ et en 0 ;

c) $f(x)=\ln\left(x^2+4x+3\right)$ sur $]-1;+\infty[$: limites en $+\infty$ et en -1;

e) $f(x)=\ln\left(1+\mathrm{e}^x\right)$ sur $\mathbf{R}$: limites en $+\infty$ et en $-\infty$;

f) $f(x)=(\ln x)^2-\ln x$ sur $]0;+\infty[$: limites en $+\infty$ et en 0.

Exercice 21 :

1. En utilisant le fait que $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x)}{x}=1$, déterminer $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}}\dfrac{\ln(1+x)}{x^2}$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} x\ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right)$

2. En utilisant le fait que $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln x}{x}=0$, déterminer $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln x}{\sqrt[n]{x}}$, pour $n\in\mathbb{N}^*$.

Exercice 22 : On considère la fonction f définie sur $]0;+\infty[$ par : $f(x)=5-x-2\dfrac{\ln x}{x}$.

On note (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé.

a) Déterminer les limites de f en 0 et en $+\infty$.
b) Démontrer que (C) admet une asymptote oblique Δ dont on donnera une équation.
c) Étudier la position de la courbe (C) par rapport à la droite Δ.

Exercice 23 : **ROC**

On rappelle que la fonction ln est définie et dérivable sur $]0;+\infty[$*, positive sur* $[1,+\infty[$*, et a pour dérivée la fonction inverse.*

On considère la fonction f définie sur $]0;+\infty[$ par $f(x)=\sqrt{x}-\ln x$.

1. Étudier les variations de f et en déduire que f admet un minimum sur $]0;+\infty[$.

2. En déduire le signe de f puis montrer que, pour tout $x>1$, $0<\dfrac{\ln x}{x}<\dfrac{\sqrt{x}}{x}$.

3. En déduire que $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln x}{x}=0$.