

NOMBRES COMPLEXES (II)

Le plan est muni d'un repère orthonormal direct $(O; \vec{u}, \vec{v})$.

O. Équations trigonométriques

Corrigé

Exercice 1 :

a) Les solutions de l'équation $\cos x = \frac{\sqrt{3}}{2}$ dans $]-\pi; \pi]$, sont : $-\frac{\pi}{6}$ et $\frac{\pi}{6}$.

b) Les solutions de l'équation $\sin x = -\frac{1}{2}$ dans $]-\pi; \pi]$, sont : $-\frac{5\pi}{6}$ et $-\frac{\pi}{6}$.

Exercice 2 :

D'après l'exercice 1, le système
$$\begin{cases} \cos x = \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \sin x = -\frac{1}{2} \end{cases}$$
 admet une unique solution dans $]-\pi; \pi]$: $-\frac{\pi}{6}$.

Exercice 3 :

Les solutions de l'équation $\cos x = \frac{\sqrt{2}}{2}$ dans \mathbf{R} , sont : $-\frac{\pi}{4}$ et $\frac{\pi}{4}$ à 2π près.

Les solutions de l'équation $\sin x = -\frac{1}{2}$ dans \mathbf{R} , sont : $-\frac{5\pi}{6}$ et $-\frac{\pi}{6}$ à 2π près.

Les deux ensembles de solutions étant disjoints, le système d'équations
$$\begin{cases} \cos x = \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \sin x = -\frac{1}{2} \end{cases}$$
 n'admet pas

de solutions dans \mathbf{R} .

I. Module et arguments

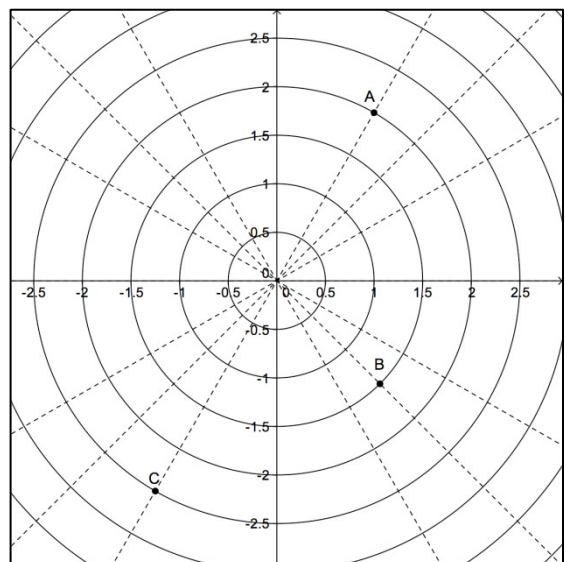
Corrigé

Exercice 4 :

A a pour affixe a tel que $|a| = 2$ et $\arg(a) = \frac{\pi}{3}$;

B a pour affixe b tel que $|b| = \frac{3}{2}$ et $\arg(b) = -\frac{\pi}{4}$;

C a pour affixe c tel que $|c| = 2,5$ et $\arg(c) = \frac{4\pi}{3}$.



Exercice 5 :

A a pour affixe a telle que $|a| = 2$ et $\arg a = 0$.

B a pour affixe b telle que $|b| = 2$ et $\arg b = \pi$. ($-\pi$ est aussi un argument de b)

C a pour affixe c telle que $|c| = 2$ et $\arg c = \frac{5\pi}{6}$.

D a pour affixe d telle que $|d| = 3$ et $\arg d = \frac{\pi}{3}$.

E a pour affixe e telle que $|e| = 2$ et $\arg e = -\frac{\pi}{6}$. ($\frac{11\pi}{6}$ est aussi un argument de e)

F a pour affixe f telle que $|f| = 2$ et $\arg f = -\frac{\pi}{2}$. ($\frac{3\pi}{2}$ est aussi un argument de f)

G a pour affixe g telle que $|g| = 3$ et $\arg g = -\frac{2\pi}{3}$. ($\frac{4\pi}{3}$ est aussi un argument de g)

H a pour affixe h telle que $|h| = 3$ et $\arg h = \frac{\pi}{5}$.

Exercice 6 :

A a pour affixe a telle que $|a| = \frac{1}{2}$ et $\arg a = \frac{\pi}{4}$. B a pour affixe b telle que $|b| = 2$ et $\arg b = \frac{5\pi}{6}$.

C a pour affixe c telle que $|c| = \frac{1}{2}$ et $\arg c = -\frac{\pi}{3}$. D a pour affixe d telle que $|d| = \sqrt{2}$ et $\arg d = \frac{\pi}{4}$.

E a pour affixe e telle que $|e| = \frac{3}{2}\sqrt{2}$ et $\arg e = \frac{3\pi}{4}$.

Exercice 7 :

Point	Module	Argument	Vrai-Faux ?	Justification :
A	3	$\frac{\pi}{6}$	Faux	un argument de l'affixe de A est $\frac{\pi}{3}$
B	2	$\frac{13\pi}{2}$	Vrai	car $\frac{13\pi}{2} = \frac{\pi}{2} + 3 \times 2\pi$
C	2,5	$\frac{2\pi}{3}$	Faux	le module de l'affixe de C est 3
D	-1	$\frac{\pi}{4}$	Faux	D a pour affixe d telle que $ d = 1$ et $\arg d = -\frac{3\pi}{4} [2\pi]$
E	2	$-\pi$	Vrai	
F	2	$\frac{11\pi}{6}$	Vrai	une autre valeur possible de l'argument est $-\frac{\pi}{6} = \frac{11\pi}{6} - 2\pi$
G	1	$-\frac{21\pi}{4}$	Vrai	car $-\frac{21\pi}{4} = -\frac{16\pi}{4} - \frac{5\pi}{4} = -4\pi - \frac{5\pi}{4} = -2 \times 2\pi - \left(\frac{5\pi}{4}\right)$
H	-3	$-\frac{11\pi}{6}$	Faux	le module de l'affixe de H est 3
I	2	$\frac{10\pi}{3}$	Faux	le module de l'affixe de I est 3
J	2,5	$\frac{\pi}{2}$	Faux	un argument de l'affixe de J est $-\frac{\pi}{2}$

Exercice 8 :

Dans chacun des cas ci-dessous on peut donner sans calcul le module et l'argument principal, en s'aidant éventuellement d'une figure :

- a) $2 \left[\cos\left(\frac{5\pi}{12}\right) + i \sin\left(\frac{5\pi}{12}\right) \right]$ module : 2 argument principal : $\frac{5\pi}{12}$
- b) $2i$ module : 2 argument principal : $\frac{\pi}{2}$
- c) $-3i$ module : 3 argument principal : $-\frac{\pi}{2}$
- d) 1 module : 1 argument principal : 0
- e) -2 module : 2 argument principal : π

Exercice 9 :

• $a = 1 + i\sqrt{3}$

On a : $|a| = |1 + i\sqrt{3}| = \sqrt{1^2 + \sqrt{3}^2} = \sqrt{4} = 2$ et $a = 1 + i\sqrt{3} = 2 \left(\frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2} \right) = 2 \left(\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3} \right)$

Le module de a est 2 et son argument principal est $\frac{\pi}{3}$.

• $b = 1 - i$

On a : $|b| = |1 - i| = \sqrt{1^2 + (-1)^2} = \sqrt{2}$

et $b = 1 - i = \sqrt{2} \left(\frac{1}{\sqrt{2}} - i \frac{1}{\sqrt{2}} \right) = \sqrt{2} \left(\frac{\sqrt{2}}{2} - i \frac{\sqrt{2}}{2} \right) = \sqrt{2} \left(\cos \left(-\frac{\pi}{4} \right) + i \sin \left(-\frac{\pi}{4} \right) \right)$

Le module de b est $\sqrt{2}$ et son argument principal est $-\frac{\pi}{4}$.

• $c = \sqrt{3} + i$

On a : $|c| = |\sqrt{3} + i| = \sqrt{\sqrt{3}^2 + 1^2} = \sqrt{4} = 2$ et $c = \sqrt{3} + i = 2 \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + i \frac{1}{2} \right) = 2 \left(\cos \frac{5\pi}{6} + i \sin \frac{5\pi}{6} \right)$

Le module de c est 2 et son argument principal est $\frac{5\pi}{6}$.

• $d = \sqrt{3} - i$

On a : $|d| = |\sqrt{3} - i| = \sqrt{\sqrt{3}^2 + (-1)^2} = \sqrt{4} = 2$

et $d = \sqrt{3} - i = 2 \left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i \right) = 2 \left(\cos \left(\frac{-\pi}{6} \right) + i \sin \left(\frac{-\pi}{6} \right) \right)$

Le module de d est 2 et son argument principal est $\frac{-\pi}{6}$.

Exercice 10 :

On a : $|z_1| = |-1 + i| = \sqrt{(-1)^2 + 1^2} = \sqrt{2}$ et

$z_1 = -1 + i = \sqrt{2} \left(-\frac{1}{\sqrt{2}} + i \frac{1}{\sqrt{2}} \right) = \sqrt{2} \left(-\frac{\sqrt{2}}{2} + i \frac{\sqrt{2}}{2} \right) = \sqrt{2} \left(\cos \frac{3\pi}{4} + i \sin \frac{3\pi}{4} \right)$

Le module de z_1 est $\sqrt{2}$ et son argument principal est $\frac{3\pi}{4}$.

On a : $z_2 = i = 1 \times (0 + 1 \times i) = 1 \times \left(\cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2} \right)$.

Le module de z_2 est donc 1 et son argument principal est $\frac{\pi}{2}$.

On a : $z_3 = -2 = 2(-1 + 0 \times i) = 2(\cos \pi + i \sin \pi)$.

Le module de z_3 est donc 2 et son argument principal est π .

On a : $|z_4| = |2 - 2i\sqrt{3}| = \sqrt{2^2 + (-2\sqrt{3})^2} = \sqrt{4 + 4 \times 3} = \sqrt{4 \times 4} = 4$.

et $z_4 = 2 - 2i\sqrt{3} = 4 \left(\frac{2}{4} - i \frac{2\sqrt{3}}{4} \right) = 4 \left(\frac{1}{2} - i \frac{\sqrt{3}}{2} \right) = \sqrt{2} \left(\cos \left(-\frac{\pi}{3} \right) + i \sin \left(-\frac{\pi}{3} \right) \right)$

Le module de z_4 est donc 4 et son argument principal est $-\frac{\pi}{3}$.

Pour le dernier, on transforme d'abord l'écriture : $z_5 = 1 + \frac{1}{i} = 1 + \frac{1 \times i}{i \times i} = 1 + \frac{i}{-1} = 1 - i$.

On a : $|z_5| = |1 - i| = \sqrt{1^2 + (-1)^2} = \sqrt{2}$ et

$z_5 = 1 - i = \sqrt{2} \left(\frac{1}{\sqrt{2}} - i \frac{1}{\sqrt{2}} \right) = \sqrt{2} \left(\frac{\sqrt{2}}{2} - i \frac{\sqrt{2}}{2} \right) = \sqrt{2} \left(\cos \left(-\frac{\pi}{4} \right) + i \sin \left(-\frac{\pi}{4} \right) \right)$.

Le module de z_5 est $\sqrt{2}$ et son argument principal est $-\frac{\pi}{4}$.

Exercice 11 :

On a : $|z| = \left| \frac{1 - \sqrt{3}}{2} (i - 1) \right| = \left| \frac{1 - \sqrt{3}}{2} \right| |-1 + i| = \frac{\sqrt{3} - 1}{2} \sqrt{(-1)^2 + 1^2} = \frac{\sqrt{3} - 1}{2} \sqrt{2}$ et

$z = \frac{1 - \sqrt{3}}{2} (i - 1) = \frac{\sqrt{3} - 1}{2} (1 - i) = \frac{\sqrt{3} - 1}{2} \sqrt{2} \left(\frac{1}{\sqrt{2}} - i \frac{1}{\sqrt{2}} \right)$
 $= \frac{\sqrt{3} - 1}{2} \sqrt{2} \left(\frac{\sqrt{2}}{2} - i \frac{\sqrt{2}}{2} \right) = \frac{\sqrt{3} - 1}{2} \sqrt{2} \left(\cos \left(-\frac{\pi}{4} \right) + i \sin \left(-\frac{\pi}{4} \right) \right)$.

Le module de z est $\frac{\sqrt{3} - 1}{2} \sqrt{2}$ et son argument principal est $-\frac{\pi}{4}$.

Exercice 12 : $z_1 = -\sqrt{2} + \sqrt{2}i$ et $z_2 = -\sqrt{2} - \sqrt{2}i$ sont deux nombres complexes conjugués.

On a $|z_1| = \sqrt{(-\sqrt{2})^2 + \sqrt{2}^2} = \sqrt{2 + 2} = \sqrt{4} = 2$ et $z_1 = 2 \left(-\frac{\sqrt{2}}{2} + i \frac{\sqrt{2}}{2} \right) = 2 \left(\cos \frac{3\pi}{4} + i \sin \frac{3\pi}{4} \right)$.

Le module de z_1 est donc 2 et son argument principal est $\frac{3\pi}{4}$.

Comme z_2 est le conjugué de z_1 , il a le même module, c'est-à-dire 2 et un argument opposé, c'est-à-dire $-\frac{3\pi}{4}$.

Exercice 13 :

- $5 - 5i$

On a $|5 - 5i| = \sqrt{5^2 + (-5)^2} = \sqrt{50} = 5\sqrt{2}$ et

$$5 - 5i = 5\sqrt{2} \left(\frac{5}{5\sqrt{2}} - i \frac{5}{5\sqrt{2}} \right) = 5\sqrt{2} \left(\frac{1}{\sqrt{2}} - i \frac{1}{\sqrt{2}} \right) = 5\sqrt{2} \left(\frac{\sqrt{2}}{2} - i \frac{\sqrt{2}}{2} \right) = 5\sqrt{2} \left[\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) + i \sin\left(-\frac{\pi}{4}\right) \right].$$

- $-1 + i\sqrt{3}$

On a $|-1 + i\sqrt{3}| = \sqrt{(-1)^2 + (\sqrt{3})^2} = \sqrt{4} = 2$

et $-1 + i\sqrt{3} = 2 \left(\frac{-1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2} \right) = 2 \left(\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) + i \sin\left(\frac{2\pi}{3}\right) \right)$

- $-2i\sqrt{3}$

On a $|-2i\sqrt{3}| = \sqrt{0^2 + (-2\sqrt{3})^2} = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$

et $-2i\sqrt{3} = 2\sqrt{3}(0 - i) = 2\sqrt{3} \left(\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) + i \sin\left(-\frac{\pi}{2}\right) \right)$

- $3 + i\sqrt{3}$

On a $|3 + i\sqrt{3}| = \sqrt{3^2 + (\sqrt{3})^2} = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$

et $3 + i\sqrt{3} = 2\sqrt{3} \left(\frac{3}{2\sqrt{3}} + i \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{3}} \right) = 2\sqrt{3} \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + i \frac{1}{2} \right) = 2\sqrt{3} \left(\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{6}\right) \right)$

- $2 + \frac{2}{\sqrt{3}}i$

On a $\left| 2 + \frac{2}{\sqrt{3}}i \right| = \sqrt{2^2 + \left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^2} = \sqrt{4 + \frac{4}{3}} = \sqrt{\frac{16}{3}} = \frac{4}{\sqrt{3}} = \frac{4\sqrt{3}}{3}$

et $2 + \frac{2}{\sqrt{3}}i = \frac{4\sqrt{3}}{3} \left(\frac{3}{2\sqrt{3}} + i \frac{1}{2} \right) = \frac{4\sqrt{3}}{3} \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + i \frac{1}{2} \right) = \frac{4\sqrt{3}}{3} \left(\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{6}\right) \right)$

- $-4 \left[\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) \right] = -4 \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) - 4i \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) = -4 \frac{\sqrt{2}}{2} - 4i \frac{\sqrt{2}}{2} = -2\sqrt{2} - 2\sqrt{2}i$

On a $|-2\sqrt{2} - 2\sqrt{2}i| = \sqrt{(-2\sqrt{2})^2 + (-2\sqrt{2})^2} = \sqrt{16} = 4$

et $-2\sqrt{2} - 2\sqrt{2}i = 4 \left(-\frac{\sqrt{2}}{2} - i \frac{\sqrt{2}}{2} \right) = 4 \left(\cos\left(-\frac{3\pi}{4}\right) + i \sin\left(-\frac{3\pi}{4}\right) \right)$

- $\frac{\sqrt{6}}{1+i} = \frac{\sqrt{6}(1-i)}{(1+i)(1-i)} = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{6}i}{1^2 + 1^2} = \frac{\sqrt{6}}{2} - \frac{\sqrt{6}}{2}i$

On a $\left| \frac{\sqrt{6}}{2} - \frac{\sqrt{6}}{2}i \right| = \sqrt{\left(\frac{\sqrt{6}}{2}\right)^2 + \left(-\frac{\sqrt{6}}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{6}{4} + \frac{6}{4}} = \sqrt{3}$

et $\frac{\sqrt{6}}{2} - \frac{\sqrt{6}}{2}i = \sqrt{3} \left(\frac{\sqrt{2}}{2} - i \frac{\sqrt{2}}{2} \right) = \sqrt{3} \left(\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) + i \sin\left(-\frac{\pi}{4}\right) \right)$

$$\bullet \frac{2}{1-i\sqrt{3}} = \frac{2(1+i\sqrt{3})}{(1-i\sqrt{3})(1+i\sqrt{3})} = \frac{2+2i\sqrt{3}}{1^2+\sqrt{3}^2} = \frac{2}{4} + \frac{2i\sqrt{3}}{4} = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$$

et alors $\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} = \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)$

$$\bullet \frac{\sqrt{6}-i\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{6}}{2} - \frac{i\sqrt{2}}{2}$$

On a $\left|\frac{\sqrt{6}}{2} - \frac{i\sqrt{2}}{2}\right| = \sqrt{\left(\frac{\sqrt{6}}{2}\right)^2 + \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{6}{4} + \frac{2}{4}} = \sqrt{2}$

et $\frac{\sqrt{6}}{2} - \frac{i\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - i\frac{1}{2}\right) = \sqrt{2}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)\right)$

Exercice 14 :

On a $|z_1| = \sqrt{1^2 + \sqrt{3}^2} = \sqrt{1+3} = \sqrt{4} = 2$ et $z_1 = 2\left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 2\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right) = 2e^{i\frac{\pi}{3}}$.

On a $|z_2| = \sqrt{2^2 + (-2)^2} = \sqrt{4+4} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$ et

$$z_2 = 2\sqrt{2}\left(\frac{2}{2\sqrt{2}} - i\frac{2}{2\sqrt{2}}\right) = 2\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 2\sqrt{2}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right) = 2\sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}}$$

On a $|z_3| = |-2i| = 2|i| = 2 \times 1 = 2$ et $z_3 = 2(0 - 1 \times i) = 2\left(\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right) = 2e^{-i\frac{\pi}{2}}$.

On a $|z_4| = |3| = 3$ et $z_4 = 3(1 + 0 \times i) = 3(\cos 0 + i\sin 0) = 3e^{i0}$.

On a $|z_5| = \sqrt{(-3)^2 + \sqrt{3}^2} = \sqrt{9+3} = 2\sqrt{3}$ et

$$z_5 = 2\sqrt{3}\left(-\frac{3}{2\sqrt{3}} + i\frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{3}}\right) = 2\sqrt{3}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{1}{2}\right) = 2\sqrt{3}\left(\cos\frac{5\pi}{6} + i\sin\frac{5\pi}{6}\right) = 2\sqrt{3}e^{i\frac{5\pi}{6}}$$

Exercice 15 :

1. On remet sous forme algébrique :

$$z_1 = 2(\cos \pi + i\sin \pi) = 2(-1 + i \times 0) = -2$$

$$z_2 = \cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3} = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$z_3 = \sqrt{3}\left(\cos\frac{5\pi}{6} + i\sin\frac{5\pi}{6}\right) = \sqrt{3}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{1}{2}\right) = -\frac{3}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$z_4 = \frac{1}{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{\sqrt{2}}{4} + i\frac{\sqrt{2}}{4}$$

$$z_5 = \frac{\sqrt{2}}{2}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}(0 - i \times 1) = -\frac{\sqrt{2}}{2}i$$

2. Le nombre $z_1 = -2(\cos \pi + i \sin \pi)$ n'est pas sous forme trigonométrique car le nombre devant la parenthèse est négatif.

Par contre, $z_1 = 2(-\cos \pi - i \sin \pi) = 2(\cos(-\pi) + i \sin(-\pi))$ est son écriture trigonométrique.

Le nombre $z_2 = \cos \frac{2\pi}{3} - i \sin \frac{2\pi}{3}$ n'est pas non plus sous forme trigonométrique car c'est une différence et non une somme.

Par contre, $z_2 = -\frac{1}{2} - i \frac{\sqrt{3}}{2} = \cos\left(-\frac{2\pi}{3}\right) + i \sin\left(-\frac{2\pi}{3}\right)$ est son écriture trigonométrique.

Exercice 16 :

On remet sous forme trigonométrique, puis sous forme algébrique :

$$z_1 = 4e^{i\frac{\pi}{2}} = 4\left(\cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2}\right) = 4\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i \frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 2\sqrt{2} + 2i\sqrt{2}$$

$$z_2 = 2e^{i\frac{2\pi}{3}} = 2\left(\cos \frac{2\pi}{3} + i \sin \frac{2\pi}{3}\right) = 2\left(-\frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -1 + i\sqrt{3}$$

$$z_3 = e^{-i\frac{3\pi}{4}} = \cos\left(-\frac{3\pi}{4}\right) + i \sin\left(-\frac{3\pi}{4}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2} - i \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$z_4 = \sqrt{2}e^{i\pi} = \sqrt{2} \times (-1) = -\sqrt{2}$$

$$z_5 = 3e^{-i\frac{\pi}{6}} = 3\left(\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right) + i \sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)\right) = 3\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - i \frac{1}{2}\right) = \frac{3\sqrt{3}}{2} - i \frac{3}{2}$$

Exercice 17 : $z_1 = 1 + i$ et $z_2 = 1 - i\sqrt{3}$.

$$1. |z_1| = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2} \text{ et } \frac{z_1}{|z_1|} = \frac{1}{\sqrt{2}} + i \times \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} + i \times \frac{\sqrt{2}}{2} = \cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4}$$

donc $\frac{\pi}{4}$ est un argument de z_1 .

$$|z_2| = \sqrt{1^2 + (-\sqrt{3})^2} = 2 \text{ et } \frac{z_2}{|z_2|} = \frac{1}{2} - i \frac{\sqrt{3}}{2} = \cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) + i \sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)$$

donc $-\frac{\pi}{3}$ est un argument de z_2 .

$$2. |\overline{z_1}| = |z_1| = \sqrt{2} \text{ et } \arg(\overline{z_1}) = -\arg(z_1) + k \times 2\pi = -\frac{\pi}{4} + k \times 2\pi \quad (k \in \mathbf{Z}) ;$$

$$|z_1 z_2| = |z_1| \times |z_2| = 2\sqrt{2} \text{ et } \arg(z_1 z_2) = \arg(z_1) + \arg(z_2) + k \times 2\pi = -\frac{\pi}{12} + k \times 2\pi ;$$

$$\left|\frac{1}{z_2}\right| = \frac{1}{|z_2|} = \frac{1}{2} \text{ et } \arg\left(\frac{1}{z_2}\right) = -\arg(z_2) + k \times 2\pi = \frac{\pi}{3} + k \times 2\pi ;$$

$$\left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{|z_1|}{|z_2|} = \frac{\sqrt{2}}{2} \text{ et } \arg\left(\frac{z_1}{z_2}\right) = \arg(z_1) - \arg(z_2) + k \times 2\pi = \frac{7\pi}{12} + k \times 2\pi.$$

Exercice 18 :

A et B sont les points du plan d'affixes respectives $z_A = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}i$ et $z_B = \frac{\sqrt{3}+1}{2} - 2i$.

$$(\vec{u}; \overrightarrow{AB}) = \arg(z_B - z_A) \quad [2\pi].$$

$$z_B - z_A = \frac{\sqrt{3}+1}{2} - 2i - \frac{1}{2} + \frac{1}{2}i = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{3}{2}i;$$

$$\left| \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{3}{2}i \right| = \sqrt{\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \left(-\frac{3}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{3}{4} + \frac{9}{4}} = \sqrt{\frac{12}{4}} = \sqrt{3}.$$

$$z_B - z_A = \sqrt{3} \left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i \right) = \sqrt{3} \left(\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) + i \sin\left(-\frac{\pi}{3}\right) \right) \text{ donc } \arg(z_B - z_A) = -\frac{\pi}{3}.$$

$$\text{Donc } (\vec{u}; \overrightarrow{AB}) = -\frac{\pi}{3} \quad [2\pi].$$

Exercice 19 :

A, B et C sont les points du plan d'affixes respectives $z_A = -1 + i\sqrt{3}$ et $z_B = -1 - i\sqrt{3}$ et $z_C = -2$.

$$(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB}) = \arg\left(\frac{z_B - z_C}{z_A - z_C}\right) \quad [2\pi].$$

$$\frac{z_B - z_C}{z_A - z_C} = \frac{-1 - i\sqrt{3} + 2}{-1 + i\sqrt{3} + 2} = \frac{1 - i\sqrt{3}}{1 + i\sqrt{3}} = \frac{(1 - i\sqrt{3})(1 - i\sqrt{3})}{(1 + i\sqrt{3})(1 - i\sqrt{3})} = \frac{1 - 3 - 2i\sqrt{3}}{4} = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\text{donc } \frac{z_B - z_C}{z_A - z_C} = \cos\left(-\frac{2\pi}{3}\right) + i \sin\left(-\frac{2\pi}{3}\right). \text{ D'où } \arg\left(\frac{z_B - z_C}{z_A - z_C}\right) = -\frac{2\pi}{3} \text{ et } (\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB}) = -\frac{2\pi}{3} \quad [2\pi].$$

Exercice 20 :

A, B, C et D sont les points d'affixes respectives $z_A = -i$ et $z_B = 3$, $z_C = 2 + 3i$ et $z_D = -1 + 2i$.

$$(\overrightarrow{BD}, \overrightarrow{AC}) = \arg\left(\frac{z_C - z_A}{z_D - z_B}\right) \quad [2\pi].$$

$$\frac{z_C - z_A}{z_D - z_B} = \frac{2 + 3i + i}{-1 + 2i - 3} = \frac{2 + 4i}{-4 + 2i} = \frac{1 + 2i}{-2 + i} = \frac{(1 + 2i)(-2 - i)}{4 + 1} = \frac{-2 + 2 - i - 4i}{5} = -i.$$

$$\text{On a donc : } (\overrightarrow{BD}, \overrightarrow{AC}) = \arg(-i) = -\frac{\pi}{2}$$

Exercice 21 :

$$\text{a) } \frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} = \frac{-3 + i}{-1 - 3i} = \frac{(-3 + i)(-1 + 3i)}{(-1 - 3i)(-1 + 3i)} = \frac{-10i}{10} = -i = \cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) + i \sin\left(-\frac{\pi}{2}\right);$$

$$\left| \frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} \right| = 1 \Leftrightarrow |z_C - z_A| = |z_B - z_A| \Leftrightarrow AC = AB$$

$$\arg\left(\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}\right) = -\frac{\pi}{2} + k \times 2\pi \Leftrightarrow (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = -\frac{\pi}{2} + k \times 2\pi.$$

Par conséquent, le triangle ABC est rectangle et isocèle en A .

$$\text{b) } \frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} = \frac{1 + i\sqrt{3}}{2} = \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{3}\right);$$

De la même façon qu'en a), on montre que : $AB = AC$

$$\arg\left(\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}\right) = \frac{\pi}{3} + k \times 2\pi \Leftrightarrow (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = \frac{\pi}{3} + k \times 2\pi.$$

Par conséquent, le triangle ABC est équilatéral.

$$\text{c) } \frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} = \frac{2 + i}{1 - 2i} = \frac{(2 + i)(1 + 2i)}{(1 - 2i)(1 + 2i)} = i = \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{2}\right);$$

De la même façon qu'en a), on montre que : $AB = AC$

$$\arg\left(\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}\right) = \frac{\pi}{2} + k \times 2\pi \Leftrightarrow (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = \frac{\pi}{2} + k \times 2\pi.$$

Par conséquent, le triangle ABC est rectangle et isocèle en A .

$$\text{d) } \frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} = \frac{\frac{1}{2} - \sqrt{3} - i\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + 1\right)}{1 - 2i} = \frac{\left[\frac{1}{2} - \sqrt{3} - i\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + 1\right)\right](1 + 2i)}{(1 - 2i)(1 + 2i)} = \frac{\frac{5}{2} - \frac{5}{2}i\sqrt{3}}{5} = \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} = \cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) + i \sin\left(-\frac{\pi}{3}\right);$$

De la même façon qu'en a), on montre que : $AB = AC$

$$\arg\left(\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}\right) = -\frac{\pi}{3} + k \times 2\pi \Leftrightarrow (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = -\frac{\pi}{3} + k \times 2\pi.$$

Par conséquent, le triangle ABC est équilatéral.