# SUITES

## I. Calculs de termes

Exercice 1 : On considère la suite $(u_n)$ définie pour tout entier naturel $n$ par :

a) $u_n = n^2 - 2n + 3$. Calculer $u_0$, $u_1$, $u_2$.

b) $u_n = 1 - \dfrac{1}{2^n}$. Calculer $u_0$, $u_1$, $u_2$.

c) $u_n = \dfrac{3n-2}{2n+5}$. Calculer les trois premiers termes de la suite.

Exercice 2 : On considère la suite $(u_n)$ définie par :

a) $\begin{cases} u_0 = \dfrac{1}{2} \\ \text{pour tout entier naturel } n,\ u_{n+1} = \dfrac{1}{2}\left(u_n + \dfrac{2}{u_n}\right) \end{cases}$. Calculer $u_1$, $u_2$.

b) $\begin{cases} u_0 = 1 \\ \text{pour tout entier naturel } n,\ u_{n+1} = u_n + 2n + 3 \end{cases}$. Calculer $u_1$, $u_2$ et $u_3$.

Exercice 3 : On considère la suite $(u_n)$ définie sur **N** par : $\begin{cases} u_0 = 0 \\ u_{n+1} = \dfrac{1}{2-u_n} \end{cases}$.

a) Calculer $u_1$, $u_2$ et $u_3$. (Donner le résultat sous forme de fraction).

b) Comparer les quatre premiers termes de la suite $(u_n)$ aux quatre premiers termes de la suite $(v_n)$ définie sur **N** par : $v_n = \dfrac{n}{n+1}$.

Exercice 4 : On considère les suites $(u_n)$ et $(v_n)$ définies sur **N*** par :

$$\begin{cases} u_1 = 0 \\ u_{n+1} = \dfrac{1}{5} - \dfrac{3}{20}u_n \end{cases} \text{ et } v_n = u_n - \frac{4}{23}.$$

Calculer $u_2$, $u_3$, $v_1$, $v_2$ et $v_3$.

Exercice 5 : On considère les suites $(a_n)$ et $(b_n)$ définies sur **N** par : $\begin{cases} a_{n+1} = \dfrac{2a_n + b_n}{3} \\ b_{n+1} = \dfrac{a_n + 2b_n}{3} \end{cases}$.

a) Pour $a_0 = 1$ et $b_0 = 1$, calculer $a_1$, $b_1$, $a_2$ et $b_2$.

b) Pour $a_0 = 1$ et $b_0 = 7$, calculer $a_1$, $b_1$, $a_2$ et $b_2$.

Exercice 6 : Soit $(u_n)$ et $(v_n)$ les suites définies sur **N** par : $\begin{cases} u_0 = 3 \\ v_0 = 4 \end{cases}$ et $\begin{cases} u_{n+1} = \dfrac{u_n + v_n}{2} \\ v_{n+1} = \dfrac{u_{n+1} + v_n}{2} \end{cases}$

et $(w_n)$ la suite définie sur **N** par : $w_n = u_n - v_n$.

Calculer $u_1$, $u_2$, $v_1$, $v_2$, $w_0$, $w_1$ et $w_2$.

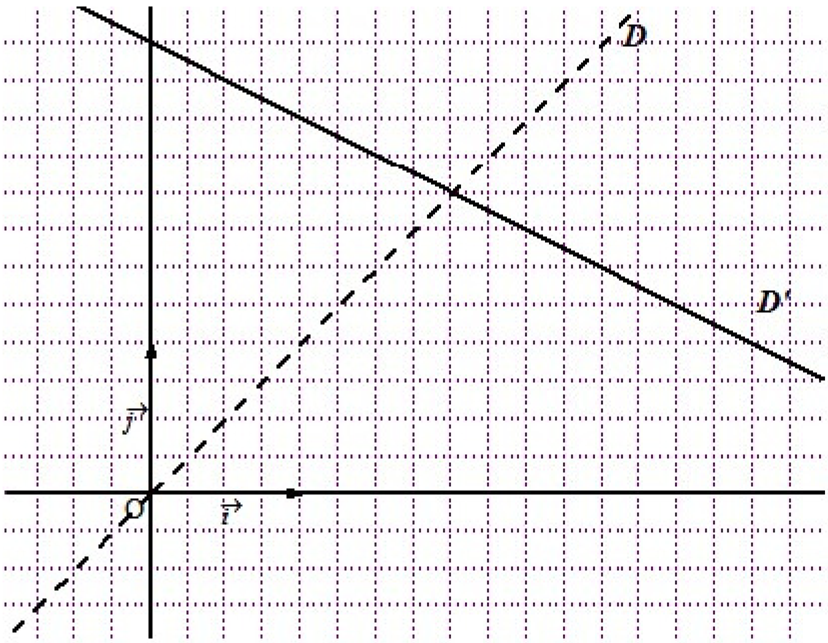
## II. Représentation graphique

Exercice 7 :

On considère la suite $(u_n)$ définie sur **N** par $\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = -\frac{1}{2}u_n + 3 \end{cases}$.

a) Dans un repère orthonormé ( unité graphique : 2 cm ), on a tracé ci-contre la droite $D$ d'équation $y = x$ et la droite $D'$ représentant la fonction $f : x \mapsto -\frac{1}{2}x + 3$.
Sans effectuer de calcul, placer sur l'axe des abscisses les termes $u_0$ , $u_1$ , $u_2$ et $u_3$.

b) La suite $(u_n)$ semble-t-elle monotone ?

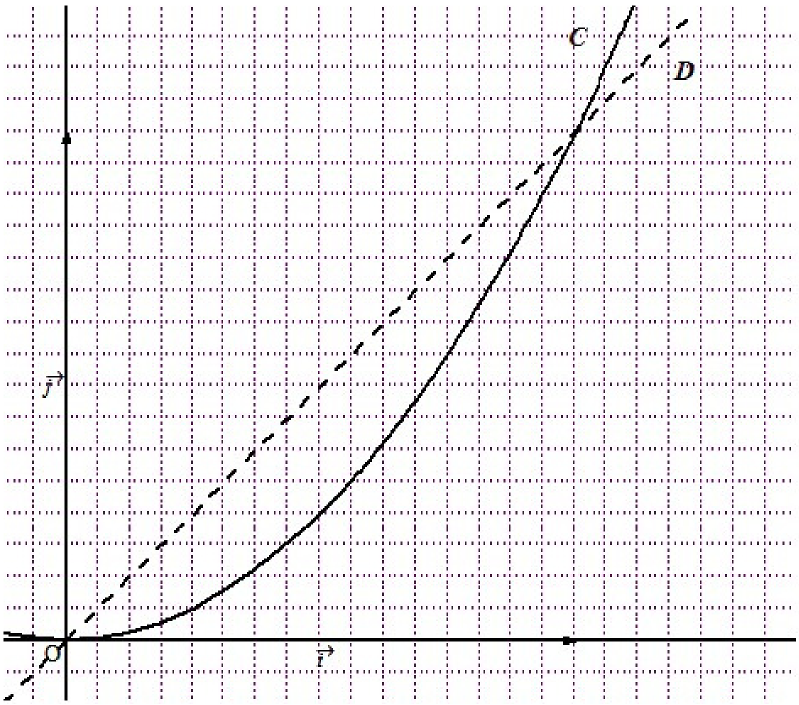



Exercice 8 :

On considère la suite $(u_n)$ définie sur **N** par $\begin{cases} u_0 = \frac{3}{4} \\ u_{n+1} = u_n^{\;2} \end{cases}$.

a) Dans un repère orthonormé ( unité graphique : 8 cm ), on a tracé ci-contre la droite $D$ d'équation $y = x$ et la courbe $C$ représentant la fonction $f : x \mapsto x^2$.
Sans effectuer de calcul, placer sur l'axe des abscisses les termes $u_0$ , $u_1$ , $u_2$ et $u_3$.

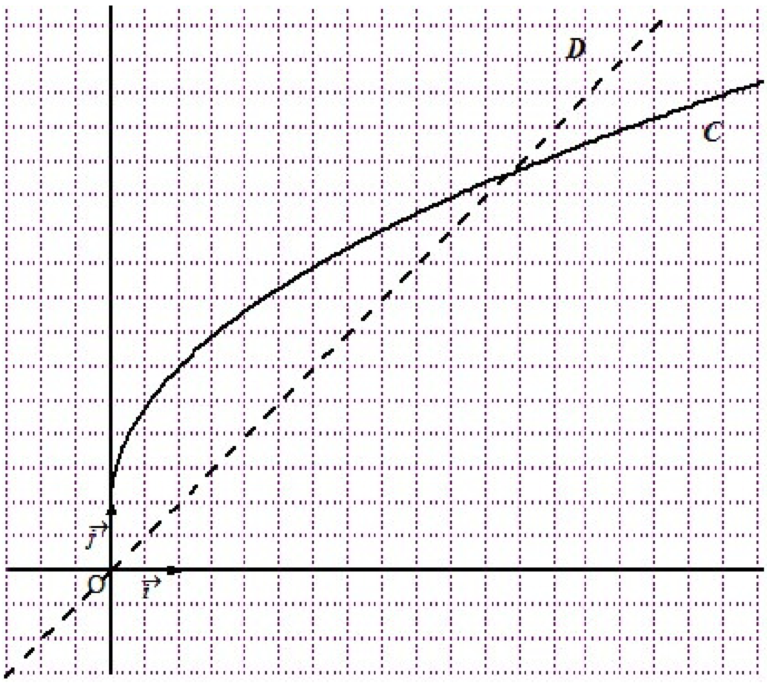
b) Émettre des conjectures sur le comportement de la suite $(u_n)$ (variation et convergence).



Exercice 9 : On considère la suite $(u_n)$ définie sur **N** par $\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = 2\sqrt{u_n} + 1 \end{cases}$.

a) Dans un repère orthonormé ( unité graphique : 1 cm ) , on a tracé ci-dessous la droite $D$ d'équation $y = x$ et la courbe $C$ représentant la fonction $f : x \mapsto 2\sqrt{x} + 1$.
Sans effectuer de calcul, placer sur l'axe des abscisses les termes $u_0$ , $u_1$ , $u_2$ et $u_3$.

b) Émettre des conjectures sur le comportement de la suite $(u_n)$ (sens de variation et convergence).




## III. Suites arithmétiques et géométriques

### *Suites arithmétiques*

Exercice 10 : $u$ est une suite arithmétique de raison $r$.
Montrer que la suite $v$ définie pour tout entier naturel $n$ par $v_n = 3u_n - 1$ est une suite arithmétique dont on précisera la raison.

Exercice 11 : La suite $u$ est définie par $u_0 = 1$ et pour tout entier naturel $n$, $u_{n+1} = \dfrac{u_n}{u_n + 1}$.

On admet que pour tout entier naturel $n$, $u_n > 0$ et on définit la suite $v$ pour tout entier naturel $n$, par $v_n = \dfrac{1}{u_n}$.

a) Montrer que $(v_n)$ est une suite arithmétique dont on précisera le premier terme et la raison.

b) Exprimer $v_n$, puis $u_n$ en fonction de $n$.

Exercice 12 : La suite $u$ est définie par $u_0 = 2$ et pour tout entier naturel $n$, $u_{n+1} = \dfrac{5u_n - 1}{u_n + 3}$.

On admet que pour tout entier naturel $n$, $u_n \neq 1$, et on pose, pour tout entier naturel $n$, $v_n = \dfrac{1}{u_n - 1}$.

a) Montrer que $(v_n)$ est une suite arithmétique dont on précisera le premier terme et la raison.

b) Exprimer $v_n$, puis $u_n$ en fonction de $n$.

## *Suites géométriques*

Exercice 13 : On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ définie par : $\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = \dfrac{\sqrt{2}}{2} u_n \end{cases}$.

a) Justifier que $(u_n)$ est une suite géométrique.

b) Établir que $u_n = 2\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)^n$.

Exercice 14 : Soit $(p_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ et $(v_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ les suites définies par $\begin{cases} p_1 = 0 \\ p_{n+1} = \dfrac{1}{5} - \dfrac{3}{20} p_n \end{cases}$ et $v_n = p_n - \dfrac{4}{23}$.

Montrer que $(v_n)$ est une suite géométrique de raison $-\dfrac{3}{20}$ ; préciser son premier terme.

Exercice 15 : On considère les suites $(a_n)$ et $(b_n)$ définies sur $\mathbf{N}$ par :

$$\begin{cases} a_0 = 1 \\ b_0 = 7 \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} a_{n+1} = \dfrac{2a_n + b_n}{3} \\ b_{n+1} = \dfrac{a_n + 2b_n}{3} \end{cases}$$

et la suite $(u_n)$ définie sur $\mathbf{N}$ par $u_n = b_n - a_n$.

a) Démontrer que $(u_n)$ est une suite géométrique de raison $\dfrac{1}{3}$ dont on précisera le premier terme.

b) Exprimer $u_n$ en fonction de $n$.

Exercice 16 : Soit $(p_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ et $(v_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ les suites définies par $\begin{cases} p_1 \\ p_{n+1} = 0{,}5p_n + 0{,}2 \end{cases}$ et $v_n = p_n - \dfrac{2}{5}$.

a) Montrer que $(v_n)$ est une suite géométrique dont on déterminera la raison.

b) En déduire une expression de $p_n$ en fonction de $n$ et $p_1$.

Exercice 17 :

1) Calculer la somme des 10 premiers termes de la suite géométrique de raison $\dfrac{1}{3}$ et de premier terme $\dfrac{1}{3}$.

2) Calculer en fonction de $n$ :

a) $S_n = \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2^2} + \dfrac{1}{2^3} + \cdots + \dfrac{1}{2^n}$.

b) $T_n = \dfrac{1}{4} + \dfrac{1}{4^2} + \dfrac{1}{4^3} + \cdots + \dfrac{1}{4^n}$.

## III. Monotonie

***Suites définies par $u_n = f(n)$***

<u>Exercice 18</u> : On considère la suite définie par $u_n = \dfrac{1}{n^2 - 4}$ pour *n* entier supérieur ou égal à 3.

a) Exprimer $u_{n+1} - u_n$ en fonction de *n* et montrer que : pour tout $n \geq 3$, $u_{n+1} - u_n < 0$.

b) En déduire les variations de la suite $(u_n)$.

<u>Exercice 19</u> : On considère la suite *u* définie sur **N** par $u_n = n^2 - 6n + 1$.

a) Étudier les variations de la fonction *f* définie sur $[0;+\infty[$ par $f(x) = x^2 - 6x + 1$.

b) En déduire que la suite *u* est croissante à partir du rang 3.

<u>Exercice 20</u> : On considère la suite définie par $u_n = \dfrac{n^2}{1+n^2}$.

1) a) Cette suite est-elle minorée ? est-elle majorée ?

 b) Calculer $u_{n+1} - u_n$. En déduire les variations de la suite.

2) Déterminer une fonction *f* définie sur $[0;+\infty[$ telle que $u_n = f(n)$ et retrouver les réponses aux questions précédentes.

***Suites définies par récurrence***

<u>Exercice 21</u> : Étudier les variations de la suite $(u_n)$ définie sur **N** par : $\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = u_n + 2n + 3 \end{cases}$.

<u>Exercice 22</u> : Soit $(u_n)$ et $(v_n)$ les suites définies sur **N** par : $\begin{cases} u_0 = 3 \\ v_0 = 4 \end{cases}$ et $\begin{cases} u_{n+1} = \dfrac{u_n + v_n}{2} \\ v_{n+1} = \dfrac{u_{n+1} + v_n}{2} \end{cases}$

et $(t_n)$ la suite définie sur **N** par : $t_n = \dfrac{u_n + 2v_n}{3}$.

Démontrer que $(t_n)$ est une suite constante.

<u>Exercice 23</u> : On considère les suites $(a_n)$ et $(b_n)$ définies sur **N** par :

$$\begin{cases} a_0 = 1 \\ b_0 = 7 \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} a_{n+1} = \dfrac{2a_n + b_n}{3} \\ b_{n+1} = \dfrac{a_n + 2b_n}{3} \end{cases}$$

a) Sachant que, pour tout entier *n*, $a_n \leq b_n$, étudier les variations des suites $(a_n)$ et $(b_n)$.

b) Montrer que la suite $(a_n + b_n)$ est constante.

## IV. Limites

<u>Exercice 24</u> : Étudier la limite des suites définies sur **N** par :

a) $u_n = 2 \times \left(\dfrac{1}{3}\right)^n$  b) $v_n = -2\left(\dfrac{11}{5}\right)^n$  c) $w_n = 1 - \dfrac{1}{2^n}$

d) $t_n = \left(-\frac{5}{7}\right)^n$ e) $p_n = \frac{4}{23} - \frac{3}{20}\left(-\frac{3}{20}\right)^n$

Exercice 25 : Soit $(u_n)$ la suite définie sur **N*** par $u_n = \frac{\sin n}{n}$.

a) Montrer que, pour tout entier naturel non nul $n$, $-\frac{1}{n}$ ; $\frac{\sin n}{n}$ ; $\frac{1}{n}$.

b) En déduire que la suite $(u_n)$ converge et déterminer sa limite.

Exercice 26 : Soit $(u_n)$ la suite définie sur **N** par $u_n = -n + \cos n$.

a) Montrer que, pour tout entier naturel $n$, $u_n$ ; $-n+1$.

b) En déduire la limite de la suite $(u_n)$.

Exercice 27 : On considère la suite définie par $u_0 = 2$ et $\forall n \in$ **N,** $u_{n+1} = \frac{1}{2}\left(u_n + \frac{1}{u_n}\right)$.

On admet que, pour tout entier naturel $n$, $u_n > 0$ et que $(u_n)$ est convergente.
Déterminer sa limite $l$ (on admet que $l > 0$).

Exercice 28 : On considère la suite définie par $u_0 = \frac{1}{2}$ et $\forall n \in$ **N,** $u_{n+1} = u_n^{\ 2}$.

a) Montrer par récurrence que $\forall n \in$ **N,** $0 < u_n < 1$.

b) Montrer par récurrence que la suite $(u_n)$ est strictement décroissante

c) La suite $(u_n)$ est-elle convergente ?

## VI. Raisonnement par récurrence

Exercice 29 : À l'aide d'un raisonnement par récurrence, montrer que :

pour tout entier naturel non nul $n$, $1 + 2 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}$.

Exercice 30 : Soit $(u_n)$ la suite définie par : $u_0 = 2$ et pour tout entier naturel $n$, $u_{n+1} = \frac{1}{3}u_n + \frac{23}{27}$.

Montrer que pour tout entier naturel $n$, on a $u_n \geq \frac{23}{18}$.

Exercice 31 : Soit $(u_n)$ la suite définie par : $u_1 = \frac{3}{2}$ et pour tout entier naturel $n$,

$$u_{n+1} = u_n\left(1 + \frac{1}{2^{n+1}}\right).$$

Montrer que pour tout entier naturel $n$, on a $u_n > 0$.

## V. Algorithmes

Exercice 32 :

On considère la suite $(u_n)$ définie par $u_0 = 0$ et, pour tout entier naturel $n$ : $u_{n+1} = 2\sqrt{u_n + 1}$

On considère l'algorithme ci-contre.

1) Donner une valeur approchée à $10^{-3}$ près du résultat qu'affiche cet algorithme lorsqu'on choisit $n = 3$.
   Pour cela vous compléterez le tableau suivant :

| $n$ | 3 | 3 | 3 | 3 |
|---|---|---|---|---|
| $i$ | 1 | | | |
| $u$ | 0 | | | |

Variables :
$n$ est un nombre entier naturel
$u$ est un réel
Initialisation :
Demander la valeur de $n$
Affecter à $u$ la valeur 0
Traitement :
Pour $i$ variant de 1 à $n$ :
    Affecter à $u$ la valeur $2\sqrt{u+1}$
Sortie :
Afficher $u$

2) Que permet de calculer cet algorithme ?
3) En utilisant votre calculatrice, compléter le tableau suivant :

| $n$ | 1 | 5 | 10 | 20 | 100 |
|---|---|---|---|---|---|
| Valeur affichée | | | | | |

4) Quelles conjectures peut-on émettre concernant la suite $(u_n)$ ?

Exercice 33

On considère la suite $(u_n)$ définie par $u_1 = 2$ et, pour tout entier naturel $n$ : $u_{n+1} = \dfrac{3u_n + 1}{u_n + 2}$.

Pour calculer le terme $u_9$ on propose l'algorithme ci-contre :

1) Compléter les deux lignes de l'algorithme où figurent des pointillés.
2) Modifier cet algorithme pour qu'il affiche tous les termes de la suite de $u_2$ à $u_9$.

Variables :
$n$ est un nombre entier naturel
$u$ est un réel
Initialisation :
Affecter à $n$ la valeur 1
Affecter à $u$ la valeur 2
Traitement :
Tant que $n < 9$ :
    Affecter à $u$ la valeur ......
    Affecter à $n$ la valeur ......
Sortie :
Afficher $u$

Exercice 34

On considère la suite $(u_n)$ définie par $u_1 = 2$ et, pour tout entier naturel $n$ : $u_{n+1} = 3(u_n + 2)$.

Ecrire un algorithme qui permet de calculer et d'afficher le terme $u_n$ lorsqu'on fournit la valeur de $n$.

Exercice 35

On considère la suite $(u_n)$ définie par $u_0 = \dfrac{3}{4}$ et, pour tout entier naturel $n$ : $u_{n+1} = u_n{}^2$.

On admet que la suite $(u_n)$ est décroissante et a pour limite 0.

Ecrire un algorithme permettant de calculer et d'afficher le plus petit entier naturel $n$ tel que $u_n < 0{,}0001$.

Exercice 36

On considère la suite $(u_n)$ définie pour tout entier naturel $n$ par : $u_n = 2\times 3^n + 1$.

On admet que $(u_n)$ est croissante et que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.

1) Ecrire un algorithme qui, un nombre A étant donné, permet de trouver et d'afficher le plus petit entier naturel n tel que $u_n > A$.
2) Utiliser votre calculatrice pour obtenir la plus petite valeur de $n$ tel que $u_n > 10^6$.