SUITES

I. Calculs de termes *Corrigé*

Exercice 1 :

a) $u_n = n^2 - 2n + 3$: $u_0 = 0^2 - 2\times 0 + 3 = 3$; $u_1 = 1^2 - 2\times 1 + 3 = 2$; $u_2 = 2^2 - 2\times 2 + 3 = 3$.

b) $u_n = 1 - \dfrac{1}{2^n}$: $u_0 = 1 - \dfrac{1}{2^0} = 1 - \dfrac{1}{1} = 0$; $u_1 = 1 - \dfrac{1}{2^1} = 1 - \dfrac{1}{2} = \dfrac{1}{2}$; $u_2 = 1 - \dfrac{1}{2^2} = 1 - \dfrac{1}{4} = \dfrac{3}{4}$.

c) $u_n = \dfrac{3n-2}{2n+5}$: $u_0 = \dfrac{3\times 0 - 2}{2\times 0 + 5} = -\dfrac{2}{5}$; $u_1 = \dfrac{3\times 1 - 2}{2\times 1 + 5} = \dfrac{1}{7}$; $u_2 = \dfrac{3\times 2 - 2}{2\times 2 + 5} = \dfrac{4}{9}$.

Exercice 2 :

a) $u_0 = \dfrac{1}{2}$ et pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = \dfrac{1}{2}\left(u_n + \dfrac{2}{u_n}\right)$:

$$u_1 = \frac{1}{2}\left(u_0 + \frac{2}{u_0}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} + \frac{2}{\frac{1}{2}}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} + 2\times\frac{2}{1}\right) = \frac{1}{2}\times\frac{9}{2} = \frac{9}{4} \ ;$$

$$u_2 = \frac{1}{2}\left(u_1 + \frac{2}{u_1}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{9}{4} + \frac{2}{\frac{9}{4}}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{9}{4} + 2\times\frac{4}{9}\right) = \frac{1}{2}\times\frac{9\times 9 + 8\times 4}{36} = \frac{113}{72}.$$

b) $u_0 = 1$ et pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = u_n + 2n + 3$:

$u_1 = u_0 + 2\times 0 + 3 = 1 + 3 = 4$; $u_2 = u_1 + 2\times 1 + 3 = 4 + 2 + 3 = 9$; $u_3 = u_2 + 2\times 2 + 3 = 9 + 4 + 3 = 16$.

Exercice 3 : La suite (u_n) est définie sur $\mathbf{N}$ par : $\begin{cases} u_0 = 0 \\ u_{n+1} = \dfrac{1}{2 - u_n} \end{cases}$.

a) $u_1 = \dfrac{1}{2-u_0} = \dfrac{1}{2-0} = \dfrac{1}{2}$; $u_2 = \dfrac{1}{2-u_1} = \dfrac{1}{2-\frac{1}{2}} = \dfrac{1}{\frac{3}{2}} = \dfrac{2}{3}$; $u_3 = \dfrac{1}{2-u_2} = \dfrac{1}{2-\frac{2}{3}} = \dfrac{1}{\frac{4}{3}} = \dfrac{3}{4}$.

b) $v_n = \dfrac{n}{n+1}$: $v_0 = \dfrac{0}{0+1} = 0 = u_0$; $v_1 = \dfrac{1}{1+1} = \dfrac{1}{2} = u_1$; $v_2 = \dfrac{2}{1+2} = \dfrac{2}{3} = u_2$; $v_3 = \dfrac{3}{1+3} = \dfrac{3}{4} = u_3$.

Les quatre premiers termes de la suite (v_n) sont égaux aux quatre premiers termes de la suite (u_n).

Exercice 4 : Les suites (u_n) et (v_n) sont définies sur $\mathbf{N}^*$ par : $\begin{cases} u_1 = 0 \\ u_{n+1} = \dfrac{1}{5} - \dfrac{3}{20}u_n \end{cases}$ et $v_n = u_n - \dfrac{4}{23}$.

$u_2 = \dfrac{1}{5} - \dfrac{3}{20}\times u_1 = \dfrac{1}{5} - \dfrac{3}{20}\times 0 = \dfrac{1}{5}$; $u_3 = \dfrac{1}{5} - \dfrac{3}{20}\times u_2 = \dfrac{1}{5} - \dfrac{3}{20}\times\dfrac{1}{5} = \dfrac{20-3}{5\times 20} = \dfrac{17}{100}$.

$v_1 = u_1 - \dfrac{4}{23} = 0 - \dfrac{4}{23} = -\dfrac{4}{23}$;

$v_2 = u_2 - \dfrac{4}{23} = \dfrac{1}{5} - \dfrac{4}{23} = \dfrac{23 - 4\times 5}{5\times 23} = \dfrac{3}{115}$;

$v_3 = u_3 - \dfrac{4}{23} = \dfrac{17}{100} - \dfrac{4}{23} = \dfrac{17\times 23 - 4\times 100}{100\times 23} = \dfrac{391-400}{2300} = -\dfrac{9}{2300}$.

Exercice 5 : Les suites (a_n) et (b_n) sont définies sur **N** par : $\begin{cases} a_{n+1} = \dfrac{2a_n + b_n}{3} \\ b_{n+1} = \dfrac{a_n + 2b_n}{3} \end{cases}$.

a) Pour $a_0 = 1$ et $b_0 = 1$,

$$a_1 = \frac{2a_0 + b_0}{3} = \frac{2+1}{3} = 1 \ ; \ b_1 = \frac{a_0 + 2b_0}{3} = \frac{1+2}{3} = 1 \ ; \ a_2 = \frac{2a_1 + b_1}{3} = \frac{3}{3} = 1 \ ; \ b_2 = \frac{a_1 + 2b_1}{3} = \frac{3}{3} = 1.$$

b) Pour $a_0 = 1$ et $b_0 = 7$,

$$a_1 = \frac{2+7}{3} = \frac{9}{3} = 3 \ ; \ b_1 = \frac{1+2\times 7}{3} = \frac{15}{3} = 5 \ ; \ a_2 = \frac{2\times 3 + 5}{3} = \frac{11}{3} \ ; \ b_2 = \frac{3 + 2\times 5}{3} = \frac{13}{3}.$$

Exercice 6 :

Les suites (u_n), (v_n) et (w_n) sont définies sur **N** par : $\begin{cases} u_0 = 3 \\ v_0 = 4 \end{cases}$, $\begin{cases} u_{n+1} = \dfrac{u_n + v_n}{2} \\ v_{n+1} = \dfrac{u_{n+1} + v_n}{2} \end{cases}$ et $w_n = u_n - v_n$.

$w_0 = u_0 - v_0 = 3 - 4 = -1$;

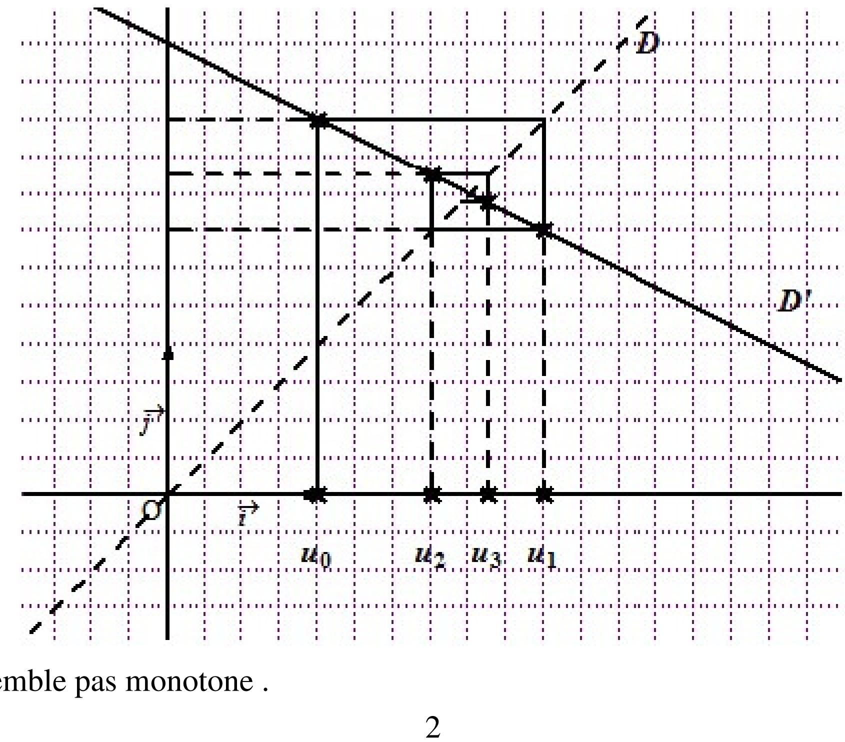
$$u_1 = \frac{u_0 + v_0}{2} = \frac{3+4}{2} = \frac{7}{2} \ ; \ v_1 = \frac{u_1 + v_0}{2} = \frac{\frac{7}{2} + 4}{2} = \frac{15}{4} \ ; \ w_1 = u_1 - v_1 = \frac{7}{2} - \frac{15}{4} = -\frac{1}{4} \ ;$$

$$u_2 = \frac{u_1 + v_1}{2} = \frac{\frac{7}{2} + \frac{15}{4}}{2} = \frac{29}{8} \ ; \ v_2 = \frac{u_2 + v_1}{2} = \frac{\frac{29}{8} + \frac{15}{4}}{2} = \frac{59}{16} \ ; \ w_2 = u_2 - v_2 = \frac{29}{8} - \frac{59}{16} = -\frac{1}{16}.$$

II. Représentation graphique	***Corrigé***

Exercice 7 : La suite (u_n) est définie sur **N** par $\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = -\dfrac{1}{2}u_n + 3 \end{cases}$.

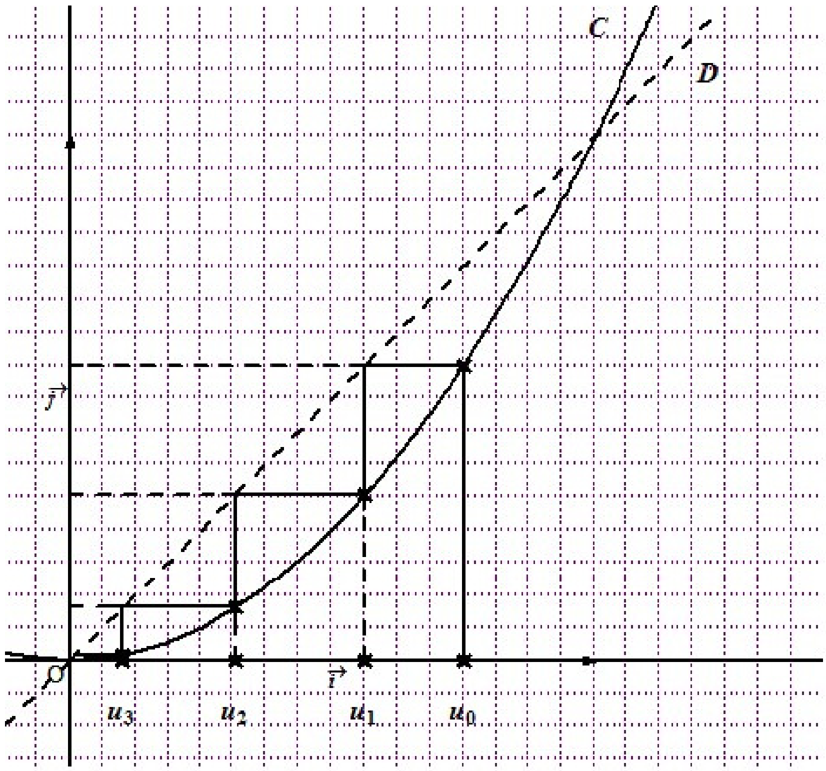
a)



b) La suite ne semble pas monotone .

Exercice 8 : La suite (u_n) est définie sur **N** par $\begin{cases} u_0 = \dfrac{3}{4} \\ u_{n+1} = u_n^{\ 2} \end{cases}$.

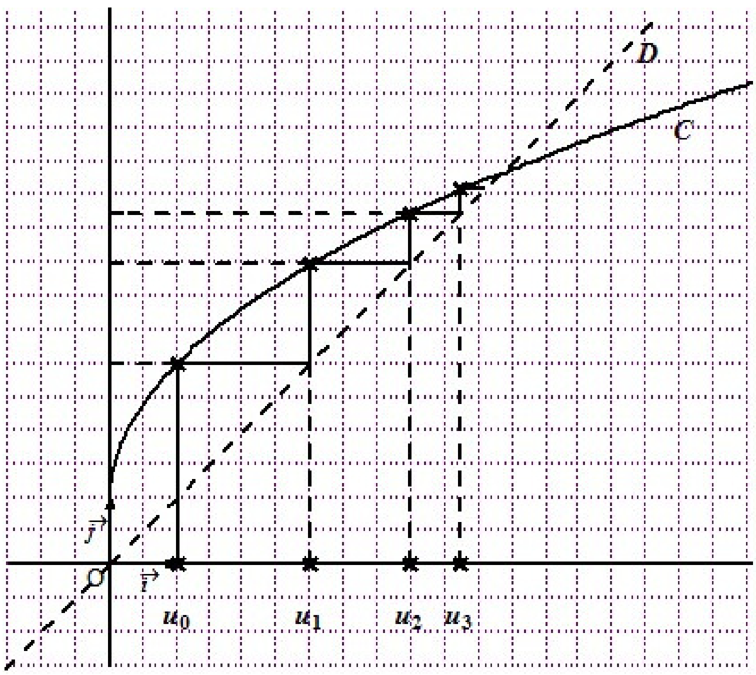
a)



b) On conjecture que la suite est décroissante et qu'elle converge vers 0 .

Exercice 9 : La suite (u_n) est définie sur **N** par $\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = 2\sqrt{u_n} + 1 \end{cases}$.

a)



b) On conjecture que la suite est croissante et qu'elle converge vers environ 5,8 .

Suites arithmétiques

Exercice 10 : u est une suite arithmétique de raison r et, pour tout entier naturel n, $v_n = 3u_n - 1$.
Pour montrer qu'une suite v est arithmétique, on calcule la différence $v_{n+1} - v_n$ et on montre que cette différence est constante.
Pour tout entier naturel n, $v_{n+1} - v_n = 3u_{n+1} - 1 - (3u_n - 1) = 3(u_{n+1} - u_n)$.
Or u est une suite arithmétique de raison r, donc $u_{n+1} - u_n = r$, puis $v_{n+1} - v_n = 3r$.
La suite v est donc arithmétique de raison $3r$.

Exercice 11 : Les suites u et v sont définies par $u_0 = 1$ et $\forall n \in \mathbf{N}$, $u_{n+1} = \dfrac{u_n}{u_n + 1}$ et $v_n = \dfrac{1}{u_n}$.

a) Pour montrer que la suite v est arithmétique, on calcule la différence $v_{n+1} - v_n$ et on montre que cette différence est constante.
Pour tout entier naturel n, $v_{n+1} - v_n = \dfrac{1}{u_{n+1}} - \dfrac{1}{u_n} = \dfrac{u_n + 1}{u_n} - \dfrac{1}{u_n} = 1$.
Donc, la suite v est arithmétique de raison 1 et de premier terme $v_0 = \dfrac{1}{u_0} = 1$.

b) On déduit de a) que pour tout entier naturel n, $v_n = 1 + n$, puis que $u_n = \dfrac{1}{v_n} = \dfrac{1}{1+n}$.

Exercice 12 : La suite u est définie par $u_0 = 2$ et pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = \dfrac{5u_n - 1}{u_n + 3}$.

On admet que pour tout entier naturel n, $u_n \neq 1$, et on pose, pour tout entier naturel n, $v_n = \dfrac{1}{u_n - 1}$.

a) Pour montrer que la suite v est arithmétique, on calcule la différence $v_{n+1} - v_n$ et on montre que cette différence est constante.
Pour tout entier naturel n,

$$v_{n+1} - v_n = \frac{1}{u_{n+1} - 1} - \frac{1}{u_n - 1} = \frac{1}{\frac{5u_n - 1}{u_n + 3} - 1} - \frac{1}{u_n - 1} = \frac{1}{\frac{5u_n - 1 - u_n - 3}{u_n + 3}} - \frac{1}{u_n - 1} = \frac{u_n + 3}{4(u_n - 1)} - \frac{1}{u_n - 1}$$
$$= \frac{u_n + 3 - 4}{4(u_n - 1)} = \frac{1}{4}$$

Donc , v est une suite arithmétique de raison $\dfrac{1}{4}$, de premier terme $v_o = \dfrac{1}{u_0 - 1} = 1$.

b) On déduit de a) que pour tout entier naturel n, $v_n = v_0 + nr = 1 + \dfrac{1}{4}n = \dfrac{4+n}{4}$.

De plus, pour tout entier naturel n, $v_n = \dfrac{1}{u_n - 1}$, donc $u_n - 1 = \dfrac{1}{v_n}$ puis

$$u_n = \frac{1}{v_n} + 1 = \frac{1}{\frac{4+n}{4}} + 1 = \frac{4}{4+n} + 1 = \frac{n+8}{n+4}.$$

Suites géométriques

Exercice 13 : La suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est définie par : $\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}u_n \end{cases}$.

a) Pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}u_n$, donc la suite est géométrique de raison $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

b) On en déduit que, pour tout entier naturel n, $u_n = u_0 \times q^n = 2\times\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)^n$.

Or, $\dfrac{\sqrt{2}}{2} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$, donc pour tout entier naturel n, $u_n = 2\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)^n$.

Exercice 14 : Soit $(p_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ et $(v_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ les suites définies par $\begin{cases} p_1 = 0 \\ p_{n+1} = \dfrac{1}{5} - \dfrac{3}{20}p_n \end{cases}$ et $v_n = p_n - \dfrac{4}{23}$.

Pour montrer que la suite v est géométrique, on exprime v_{n+1} en fonction de v_n.

Pour tout entier naturel non nul n, $v_{n+1} = p_{n+1} - \dfrac{4}{23}$; or $p_{n+1} = \dfrac{1}{5} - \dfrac{3}{20}p_n$, donc en remplaçant, on obtient : $v_{n+1} = \dfrac{1}{5} - \dfrac{3}{20}p_n - \dfrac{4}{23} = -\dfrac{3}{20}p_n + \dfrac{3}{5\times 23}$.

Puisque $v_n = p_n - \dfrac{4}{23}$, alors $p_n = v_n + \dfrac{4}{23}$, d'où :

$v_{n+1} = -\dfrac{3}{20}\left(v_n + \dfrac{4}{23}\right) - \dfrac{3}{5\times 23} = -\dfrac{3}{20}v_n - \dfrac{3\times 4}{20\times 23} + \dfrac{3}{5\times 23} = -\dfrac{3}{20}v_n$.

La suite v est donc géométrique de raison $q = -\dfrac{3}{20}$.

Son premier terme est $v_1 = p_1 - \dfrac{4}{23} = 0 - \dfrac{4}{23} = -\dfrac{4}{23}$.

Exercice 15 : On considère les suites (a_n) et (b_n) définies sur $\mathbf{N}$ par : $\begin{cases} a_0 = 1 \\ b_0 = 7 \end{cases}$ et $\begin{cases} a_{n+1} = \dfrac{2a_n + b_n}{3} \\ b_{n+1} = \dfrac{a_n + 2b_n}{3} \end{cases}$

et la suite (u_n) définie sur $\mathbf{N}$ par $u_n = b_n - a_n$.

a) Pour montrer que la suite u est géométrique, on exprime u_{n+1} en fonction de u_n.

Pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = b_{n+1} - a_{n+1} = \dfrac{a_n + 2b_n}{3} - \dfrac{2a_n + b_n}{3} = \dfrac{b_n - a_n}{3} = \dfrac{1}{3}(b_n - a_n)$.

La suite u est donc géométrique de raison $q = \dfrac{1}{3}$, de premier terme $u_0 = b_0 - a_0 = 7 - 1 = 6$.

b) On en déduit que, pour tout entier naturel n, $u_n = u_o \times q^n = 6\left(\dfrac{1}{3}\right)^n$.

Exercice 16 : $(p_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ et $(v_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ sont les suites définies par $\begin{cases} p_1 \\ p_{n+1} = 0,5p_n + 0,2 \end{cases}$ et $v_n = p_n - \dfrac{2}{5}$.

a) Pour montrer que la suite v est géométrique, on exprime v_{n+1} en fonction de v_n.

Pour tout entier naturel non nul n, $v_{n+1} = p_{n+1} - \dfrac{2}{5} = 0,5p_n + 0,2 - 0,4 = 0,5p_n - 0,2$.

On remarque que $v_{n+1} = 0{,}5(p_n - 0{,}4)$, donc $v_{n+1} = 0{,}5v_n$.
La suite v est donc géométrique de raison 0,5 et de premier terme $v_1 = p_1 - 0{,}4$.

b) On en déduit que, pour tout entier naturel non nul n, $v_n = v_1 \times q^{n-1}$; $v_n = (p_1 - 0{,}4)\times(0{,}5)^{n-1}$.
Puis que, $p_n = v_n + 0{,}4 = (p_1 - 0{,}4)\times 0{,}5)^{n-1} + 0{,}4$.

Exercice 17 :

1) Soit S la somme des 10 premiers termes de la suite géométrique de raison $\frac{1}{3}$ et de premier terme $\frac{1}{3}$.

$$S = \frac{1}{3}\times\frac{1-\left(\frac{1}{3}\right)^{10}}{1-\frac{1}{3}} = \frac{1}{3}\times\frac{1-\frac{1}{59049}}{\frac{2}{3}} = \frac{1}{3}\times\frac{3}{2}\times\frac{59048}{59049} = \frac{29524}{59049}.$$

2) a) $S_n = \frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\cdots+\frac{1}{2^n}$. S_n est la somme des n premiers termes consécutifs d'une suite géométrique de raison $\frac{1}{2}$ et de raison $\frac{1}{2}$. Donc :

$$S_n = \frac{1}{2}\times\frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^n}{1-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}\times\frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^n}{\frac{1}{2}} = 1-\left(\frac{1}{2}\right)^n.$$

b) $T_n = \frac{1}{4}+\frac{1}{4^2}+\frac{1}{4^3}+\cdots+\frac{1}{4^n}$. T_n est la somme des n premiers termes consécutifs d'une suite géométrique de raison $\frac{1}{4}$ et de premier terme $\frac{1}{4}$. Donc :

$$T_n = \frac{1}{4}\times\frac{1-\left(\frac{1}{4}\right)^n}{1-\frac{1}{4}} = \frac{1}{4}\times\frac{1-\left(\frac{1}{4}\right)^n}{\frac{3}{4}} = \frac{1}{4}\times\frac{4}{3}\times\left(1-\left(\frac{1}{4}\right)^n\right) = \frac{1}{3}\times\left(1-\left(\frac{1}{4}\right)^n\right).$$

IV. Monotonie *Corrigé*

Suites définies par $u_n = f(n)$

Exercice 18 : On considère la suite définie par $u_n = \frac{1}{n^2-4}$ pour n entier supérieur ou égal à 3.

a) On calcule :

$$u_{n+1} - u_n = \frac{1}{(n+1)^2-4} - \frac{1}{n^2-4} = \frac{n^2-4-(n+1)^2+4}{\left[(n+1)^2-4\right]\left[n^2-4\right]} = \frac{n^2-n^2-2n-1}{\left[(n+1)^2-4\right]\left[n^2-4\right]}$$
$$= \frac{-2n-1}{(n+1-2)(n+1+2)(n-2)(n+2)} = -\frac{2n+1}{(n-1)(n+3)(n-2)(n+2)}$$

Comme $n \geq 3$, $(n-1)$, $(n+3)$, $(n-2)$, $(n+2)$ et $(2n+1)$ sont strictement positifs et $u_{n+1} - u_n < 0$.

b) D'après a), pour tout entier n supérieur ou égal à 3, $u_{n+1} < u_n$.
On en déduit que la suite (u_n) est strictement décroissante à partir du rang 3.

Exercice 19 : La suite u est définie sur **N** par $u_n = n^2 - 6n + 1$.

a) Soit $f(x) = x^2 - 6x + 1$ pour x appartenant à $[0;+\infty[$.

f est dérivable sur $[0;+\infty[$ et $f'(x) = 2x - 6$.

On en déduit les variations de f sur $[0;+\infty[$:

x	0	3	$+\infty$
$2x-6$	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\searrow$	-8	$\nearrow$

b) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $n \le n+1$ et la fonction est croissante sur $[3;+\infty[$ donc la suite définie par $u_n = f(n)$ est croissante à partir du rang 3.

Exercice 20 : La suite (u_n) est définie sur N par $u_n = \dfrac{n^2}{1+n^2}$.

1) a) Comme tous les termes sont positifs, la suite est minorée par 0.

Comme $1 + n^2 \ge n^2$, $u_n \le 1$ pour tout entier n. La suite est donc majorée par 1.

b) Montrons que la suite est croissante :

$$u_{n+1} - u_n = \frac{(n+1)^2}{1+(n+1)^2} - \frac{n^2}{1+n^2} = \frac{(n+1)^2(1+n^2) - n^2\left(1+(n+1)^2\right)}{\left[1+(n+1)^2\right]\left[1+n^2\right]}$$

$$= \frac{\cancel{n^2(n+1)^2} + (n+1)^2 - n^2 - \cancel{n^2(n+1)^2}}{\left[1+(n+1)^2\right]\left[1+n^2\right]}$$

$$= \frac{n^2 + 2n + 1 - n^2}{\left[1+(n+1)^2\right]\left[1+n^2\right]} = \frac{2n+1}{\left[1+(n+1)^2\right]\left[1+n^2\right]}.$$

Comme $\left[1+(n+1)^2\right]$, $\left[1+n^2\right]$ et $(2n+1)$ sont positifs, $u_{n+1} - u_n$ est positif pour tout $n \in \mathbf{N}$.

La suite est donc croissante.

2) La suite est définie sur **N** par $u_n = f(n)$ avec $f(x) = \dfrac{x^2}{1+x^2}$.

a) La fonction f est définie et dérivable sur **R**.

$$f'(x) = \frac{2x(1+x^2) - x^2 \times 2x}{(1+x^2)} = \frac{2x + 2x^3 - 2x^3}{(1+x^2)} = \frac{2x}{(1+x^2)}$$ est du signe de $2x$:

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$2x$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	1	$\searrow$	0	$\nearrow$	1

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x^2}{x^2} = 1$; de même $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 1$

Pour tout réel positif x, $0\,;\ f(x)\,;\ 1$; donc la suite définie par $u_n = f(n)$ est bornée (par 0 et 1).

b) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $n \le n+1$ et la fonction est croissante sur $[0;+\infty[$ donc la suite définie par $u_n = f(n)$ est croissante.

De plus, $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \lim\limits_{n\to+\infty} f(n) = \lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 1$.

Suites définies par récurrence

Exercice 21 : La suite (u_n) est définie sur **N** par : $\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = u_n + 2n + 3 \end{cases}$.

Pour étudier le sens de variation de cette suite, on étudie le signe de la différence $u_{n+1} - u_n$.

Pour tout entier naturel n, $u_{n+1} - u_n = 2n+3$.
Pour tout entier naturel n, $2n+3>0$, donc $u_{n+1} - u_n > 0$.
La suite u est donc strictement croissante sur **N**.

Exercice 22 : Soit (u_n) et (v_n) les suites définies sur **N** par : $\begin{cases} u_0 = 3 \\ v_0 = 4 \end{cases}$ et $\begin{cases} u_{n+1} = \dfrac{u_n + v_n}{2} \\ v_{n+1} = \dfrac{u_{n+1} + v_n}{2} \end{cases}$

et (t_n) la suite définie sur **N** par : $t_n = \dfrac{u_n + 2v_n}{3}$.
Pour montrer qu'une suite t est constante, on montre que, pour tout entier naturel n, $t_{n+1} = t_n$.
Pour tout entier naturel n, $t_{n+1} = \dfrac{u_{n+1} + 2v_{n+1}}{3} = \dfrac{1}{3}\times(u_{n+1} + 2v_{n+1}) = \dfrac{1}{3}\times\left(\dfrac{u_n + v_n}{2} + u_{n+1} + v_n\right)$

$t_{n+1} = \dfrac{1}{3}\times\left(\dfrac{u_n + v_n}{2} + \dfrac{u_n + v_n}{2} + v_n\right) = \dfrac{1}{3}\times(u_n + 2v_n) = \dfrac{u_n + 2v_n}{3} = t_n$.
La suite t est donc constante.
Remarque, la suite t étant constante, pour tout entier naturel n, $t_n = t_0 = \dfrac{11}{3}$.

Exercice 23 : On considère les suites (a_n) et (b_n) définies sur **N** par : $\begin{cases} a_0 = 1 \\ b_0 = 7 \end{cases}$ et $\begin{cases} a_{n+1} = \dfrac{2a_n + b_n}{3} \\ b_{n+1} = \dfrac{a_n + 2b_n}{3} \end{cases}$

a) Pour étudier le sens de variation de la suite a, on étudie le signe de la différence $a_{n+1} - a_n$.

Pour tout entier naturel n, $a_{n+1} - a_n = \dfrac{2a_n + b_n}{3} - a_n = \dfrac{2a_n + b_n - 3a_n}{3} = \dfrac{b_n - a_n}{3}$.

Or l'énoncé précise que, pour tout entier naturel n, $a_n \le b_n$, donc $a_{n+1} - a_n \ge 0$, la suite a est donc croissante sur **N**.

De même, $b_{n+1} - b_n = \dfrac{a_n + 2b_n}{3} - b_n = \dfrac{a_n + 2b_n - 3b_n}{3} = \dfrac{a_n - b_n}{3}$.

Puisque pour tout entier naturel n, $a_n \le b_n$, on a : $b_{n+1} - b_n \le 0$, la suite b est donc décroissante sur **N**.

b) Pour monter que la suite $a+b$ est constante , on montre que, pour tout entier naturel n, $a_{n+1} + b_{n+1} = a_n + b_n$.

$a_{n+1} + b_{n+1} = \dfrac{2a_n + b_n}{3} + \dfrac{a_n + 2b_n}{3} = \dfrac{3a_n + 3b_n}{3} = a_n + b_n$. La suite $a+b$ est donc constante.

V. Limites *Corrigé*

Exercice 24 :

a) $u_n = 2\times\left(\dfrac{1}{3}\right)^n$:

Si $-1 < q < 1$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} q^n = 0$; $-1 < \dfrac{1}{3} < 1$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\dfrac{1}{3}\right)^n = 0$ d'où $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \lim\limits_{n\to+\infty} 2\times\left(\dfrac{1}{3}\right)^n = 0$.

b) $v_n = -2\left(\dfrac{11}{5}\right)^n$:

Si $q \rangle 1$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} q^n = +\infty$; $\dfrac{11}{5} \rangle 1$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\dfrac{11}{5}\right)^n = +\infty$ d'où $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \lim\limits_{n\to+\infty} -2\left(\dfrac{11}{5}\right)^n = -\infty$.

c) $w_n = 1 - \dfrac{1}{2^n}$: $2 > 1$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} 2^n = +\infty$ d'où $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{2^n} = 0$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} w_n = 1$.

d) $t_n = \left(-\dfrac{5}{7}\right)^n$: $-1 < -\dfrac{5}{7} < 1$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} t_n = \lim\limits_{n\to+\infty}\left(-\dfrac{5}{7}\right)^n = 0$.

e) $p_n = \dfrac{4}{23} - \dfrac{3}{20}\left(-\dfrac{3}{20}\right)^n$: $-1 < -\dfrac{3}{20} < 1$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(-\dfrac{3}{20}\right)^n = 0$ d'où $\lim\limits_{n\to+\infty} p_n = \dfrac{4}{23}$.

<u>Exercice 25</u> : (u_n) est la suite définie sur **N*** par $u_n = \dfrac{\sin n}{n}$.

a) $\forall n \in \mathbf{N}^*$, -1 ; $\sin n$; 1 ; on divise par n et $n > 0$: $-\dfrac{1}{n}$; $\dfrac{\sin n}{n}$; $\dfrac{1}{n}$.

b) $\lim\limits_{n\to+\infty} -\dfrac{1}{n} = \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n} = 0$ et, $\forall n \in \mathbf{N}^*$, $-\dfrac{1}{n}$; u_n ; $\dfrac{1}{n}$.

La suite (u_n) est encadrée par deux suites qui convergent vers 0 donc, d'après le théorème des gendarmes, (u_n) converge vers 0.

<u>Exercice 26</u> : La suite (u_n) est définie sur **N** par $u_n = -n + \cos n$.

a) $\forall n \in \mathbf{N}$, $\cos n$; 1 ; d'où, en ajoutant $-n$, $-n + \cos n$; $-n+1$ soit u_n ; $-n+1$.

b) $\lim\limits_{n\to+\infty}(-n+1) = -\infty$.

La suite (u_n) est majorée par une suite ayant pour limite $-\infty$, donc $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = -\infty$.

<u>Exercice 27</u> : On considère la suite définie par $u_0 = 2$ et $\forall n \in \mathbf{N}$, $u_{n+1} = \dfrac{1}{2}\left(u_n + \dfrac{1}{u_n}\right)$.

On admet que, pour tout entier naturel n, $u_n > 0$ et que (u_n) est convergente. Soit l sa limite $(l > 0)$.

La suite (u_n) est définie par $u_{n+1} = f(u_n)$, f étant la fonction définie sur $]0;+\infty[$ par $f(x) = \dfrac{1}{2}\left(x + \dfrac{1}{x}\right)$.

f est continue sur $]0;+\infty[$ donc en l. Alors l est solution de l'équation $f(l) = l$.

On résout l'équation (E) : $\dfrac{1}{2}\left(l + \dfrac{1}{l}\right) = l$.

Dans $]0;+\infty[$, (E) est équivalente à $\dfrac{1}{2} \times \dfrac{l^2+1}{l} = l$, soit $l^2 + 1 = 2l^2$ ou encore $l^2 - 1 = 0$.

Cette équation a deux solutions : -1 et 1. Mais comme on sait que l est strictement positive, seule la valeur 1 convient. Donc $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 1$.

<u>Exercice 28</u> : On considère la suite définie par $u_0 = \dfrac{1}{2}$ et $\forall n \in \mathbf{N}$, $u_{n+1} = {u_n}^2$.

a) *1ère étape*

$u_0 = \dfrac{1}{2}$ et $0 < \dfrac{1}{2} < 1$ donc la propriété est vraie au rang 0.

2ème étape

Supposons que la propriété est vraie au rang n : $0 < u_n < 1$.

Montrons que la propriété est vraie au rang $n+1$: $0 < u_{n+1} < 1$.

La fonction carré est strictement croissante sur $\mathbf{R}^+$ et $0 < u_n < 1$

donc $0^2 < u_n{}^2 < 1^2$ soit $0 < u_{n+1} < 1$.

Conclusion

On a montré par récurrence que : $\forall n \in \mathbf{N},\ 0 < u_n < 1$.

b) $\forall n \in \mathbf{N},\ u_{n+1} - u_n = u_n{}^2 - u_n = u_n\left(u_n - 1\right)$;

d'après le a), $u_n > 0$ et $u_n - 1 < 0$ donc $u_n\left(u_n - 1\right) < 0$ soit $u_{n+1} - u_n < 0$.

Par conséquent, la suite $\left(u_n\right)$ est strictement décroissante.

c) La suite $\left(u_n\right)$ est décroissante et minorée par 0 donc elle est convergente.

VII. Raisonnement par récurrence *Corrigé*

Exercice 29 : Montrons par récurrence que : pour tout entier naturel non nul n, $1 + 2 + \cdots + n = \dfrac{n\left(n+1\right)}{2}$.

- *Initialisation* : pour $n = 1$, $\dfrac{n(n+1)}{2} = \dfrac{1 \times 2}{2} = 1$: *la propriété est vraie au rang 1*
- *Hérédité* : on suppose que, pour un entier n non nul, on a : $1 + 2 + \cdots + n = \dfrac{n(n+1)}{2}$.

  Il faut démontrer que $1 + 2 + \cdots + (n+1) = \dfrac{(n+1)(n+2)}{2}$.

  On sait que $1 + 2 + \cdots + \left(n+1\right) = \underbrace{1 + 2 + \cdots + n} + \left(n+1\right)$; donc

  $$1 + 2 + \cdots + (n+1) = \frac{n(n+1)}{2} + (n+1) \quad (\textit{hypothèse de récurrence})$$
  $$= \frac{n\left(n+1\right) + 2\left(n+1\right)}{2} = \frac{\left(n+1\right)\left(n+2\right)}{2}.$$

  Donc, si la propriété est vraie au rang n, alors elle est vraie au rang $n+1$, c'est-à-dire qu'elle est héréditaire.
- *Conclusion* : la propriété est héréditaire et elle est vraie au rang 1 donc elle est vraie pour tout entier naturel n non nul : c'est-à-dire

$$\forall n \in \mathbf{N}^*,\ 1 + 2 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Exercice 30 : Soit $\left(u_n\right)$ la suite définie par : $u_0 = 2$ et pour tout entier naturel n , $u_{n+1} = \dfrac{1}{3}u_n + \dfrac{23}{27}$.

Montrons par récurrence que pour tout entier naturel n , on a $u_n \geq \dfrac{23}{18}$.

- *Initialisation* : $u_0 = 2$ et $2 \geq \dfrac{23}{18}$ donc la propriété est vraie au rang 0.
- *Hérédité* : on suppose la propriété vraie pour un certain rang n, $n \geq 0$, c'est-à-dire $u_n \geq \dfrac{23}{18}$.

  On a $u_n \geq \dfrac{23}{18}$ donc $\dfrac{1}{3}u_n \geq \dfrac{1}{3} \times \dfrac{23}{18}$ soit $\dfrac{1}{3}u_n \geq \dfrac{23}{54}$.

Puis $\frac{1}{3}u_n + \frac{23}{27} \geq \frac{23}{54} + \frac{23}{27}$ soit $u_{n+1} \geq \frac{69}{54}$, c'est-à-dire $u_{n+1} \geq \frac{23}{18}$;
donc la propriété est vraie au rang $n+1$.

- *Conclusion* : pour tout entier naturel n , on a $u_n \geq \frac{23}{18}$.

Exercice 31 : Soit (u_n) la suite définie par : $u_1 = \frac{3}{2}$ et pour tout entier naturel n , $u_{n+1} = u_n\left(1+\frac{1}{2^{n+1}}\right)$.

Montrons par récurrence que pour tout entier naturel n , on a $u_n > 0$.

- *Initialisation* : $u_1 = \frac{3}{2}$ et $\frac{3}{2} > 0$ donc la propriété est vraie au rang 1.
- *Hérédité* : on suppose la propriété vraie pour un certain rang n, n ? 1 , c'est-à-dire $u_n > 0$.

  Pour tout entier naturel n, $2^{n+1} > 0$ donc $\left(1+\frac{1}{2^{n+1}}\right) > 0$ et puisque $u_n > 0$ alors $u_n\left(1+\frac{1}{2^{n+1}}\right) > 0$,

  soit $u_{n+1} > 0$ donc la propriété est vraie au rang $n+1$.
- *Conclusion* : pour tout entier naturel n , on a $u_n > 0$.

V. Algorithmes

Exercice 32

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 0$ et , pour tout entier naturel *n :* $u_{n+1} = 2\sqrt{u_n + 1}$

1)

n	3	3	3	3
i		1	2	3
u	0	2	2,464	4,226

Le résultat affiché est 4,226

2) Cet algorithme permet lorsqu'on donne la valeur de n de calculer u_n.

3) Grâce à la calculatrice, on obtient :

n	1	5	10	20	100
Valeur affichée	2	4,7209	4,8271	4,8284	4,8284

On peut penser que la suite est croissante et converge vers un nombre proche de 4,8284.

Exercice 33

On considère la suite (u_n) définie par $u_1 = 2$ et , pour tout entier naturel *n :* $u_{n+1} = \frac{3u_n + 1}{u_n + 2}$.

1)

```
Variables :        n est un entier naturel
                   u est un réel

Initialisation :   Affecter à n la valeur 1
                   Affecter à u la valeur 2
Traitement :       Tant que n < 9
                     | Affecter à u la valeur (3u+1)/(u+2)
                     | Affecter à n la valeur n+1
                   Fin de Tant que
Sortie :           Afficher u
```

2)

```
Variables :        n est un entier naturel
                   u est un réel

Initialisation :   Affecter à n la valeur 1
                   Affecter à u la valeur 2
Traitement :       Tant que n < 9
                     | Affecter à u la valeur (3u+1)/(u+2)
                     | Affecter à n la valeur n+1
                     | Afficher u
                   Fin de Tant que
```

Exercice 34

On considère la suite (u_n) définie par $u_1 = 2$ et , pour tout entier naturel *n :* $u_{n+1} = 3(u_n + 2)$.

Deux méthodes possibles :

1) En utilisant la boucle « tant que » :

```
Variables :        n est un entier naturel
                   u est un réel

Initialisation :   Affecter à n la valeur 1
                   Affecter à u la valeur 2
                   Demander la valeur de N
Traitement :       Tant que n < N
                     | Affecter à u la valeur 3(u+2)
                     | Affecter à n la valeur n+1
                   Fin de Tant que
Sortie :           Afficher u
```

2) En utilisant la boucle « pour » :

```
Variables :        n est un entier naturel
                   u est un réel

Initialisation :   Demander la valeur de n
                   Affecter à u la valeur 2
Traitement :       Pour i variant de 1 à n-1
                     | Affecter à u la valeur 3(u+2)
                   Fin de Pour
Sortie :           Afficher u
```

Exercice 35

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = \frac{3}{4}$ et , pour tout entier naturel *n :*

.

```
Variables :        n est un entier naturel
                   u est un réel

Initialisation :   Affecter à n la valeur 0
                   Affecter à u la valeur 3/4

Traitement :       Tant que u ≥ 0,0001
                     | Affecter à u la valeur u²
                     | Affecter à n la valeur n+1
                   Fin de Tant que
Sortie :           Afficher n
```

Exercice 36

1)

```
Variables :        n est un entier naturel
                   A est un réel

Initialisation :   Affecter à n la valeur 0
                   Demander la valeur de A
Traitement :       Tant que 2 × 3^n + 1 ≤ A
                     | Affecter à n la valeur n+1
                   Fin de Tant que
Sortie :           Afficher n
```

2) A partir de $n = 12$, $u_n > 10^6$.

Il n'est pas nécessaire d'utiliser l'algorithme précédent, on peut directement entrer la suite.