Nombre dérivé

I. Rappels

1. Taux de variation (ou taux d'accroissement)

Première écriture du taux de variation.

Soit f une fonction f définie sur un intervalle I.
soient $x_1 \in I$, $x_2 \in I$ et $x_1 \neq x_2$.

Le taux de variation de f entre x_1 et x_2 est : $\tau = \dfrac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$

Exemple : $f : x \mapsto x^2$ définie sur $\mathbb{R}$.

Taux de variation : $\tau = \dfrac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = \dfrac{x_2^2 - x_1^2}{x_2 - x_1} = x_2 + x_1$ (après factorisation et simplification par ($x_2 - x_1$) non nul car $x_1 \neq x_2$)

Deuxième écriture du taux de variation.

Soit f une fonction f définie sur un intervalle I
On pose $x_1 = a$ et $x_2 = a+h$ avec $h \neq 0$.
Le taux de variation de f entre a et $a+h$ est : $\tau(h) = \dfrac{f(a+h) - f(a)}{h}$

Exemple : $f : x \mapsto x^2$ définie sur $\mathbb{R}$.

$\tau(h) = \dfrac{f(a+h) - f(a)}{h} = \dfrac{(a+h)^2 - a^2}{h} = \dfrac{a^2 + 2ah + h^2 - a^2}{h} = \dfrac{2ah + h^2}{h} = 2a + h$ (après simplification par h non nul par hypothèse)

2. Nombre dérivé

Soit f une fonction définie sur un intervalle I. Soient a et a+h deux réels de I.

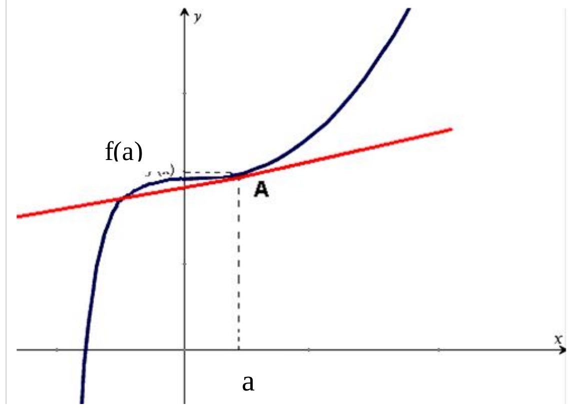
Lorsque le taux d'accroissement $\dfrac{f(a+h) - f(a)}{h}$ tend vers un nombre fini L quand h tend vers zéro, on dit que la fonction f est dérivable en a . Ce nombre L est le nombre dérivé de f en a et on le note $f'(a)$:

$$f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = L$$

Exemple de fonction non dérivable en un point : La fonction racine carrée n'est pas dérivable en 0

3. Tangente

Soit f une fonction définie et dérivable sur un intervalle I .
Soit $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans un repère.
Soit un réel $a \in I$.
Le nombre dérivé $f'(a)$ est égal au coefficient directeur de la tangente à la courbe de f au point A d'abscisse a.
La tangente à la courbe de f au point A d'abscisse a admet pour équation : $y = f'(a)(x-a) + f(a)$



Exercice 1

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = -x^2 + 4$.
a) Calculer le taux de variation de f entre 1 et 1 + h avec h un réel non nul.
b) En déduire le nombre dérivé en 1 .
c) Déterminer l'équation de la tangente à la courbe de f au point d'abscisse 1. ☞ Corrigé

Exercice 2

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = x^2 - 5x + 4$.
a) Calculer le taux de variation de f entre 2 et 2+ h avec h un réel non nul.
b) En déduire le nombre dérivé en 2 .
c) Déterminer l'équation de la tangente à la courbe de f au point d'abscisse 2. ☞ Corrigé

Exercice 3

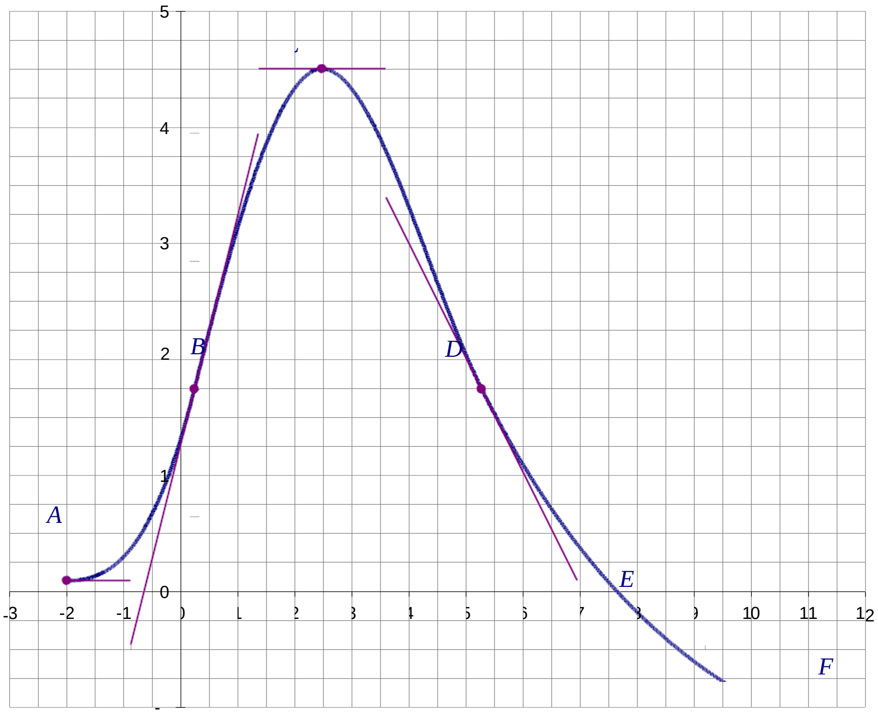
Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^*$ par : $f(x) = x - \dfrac{1}{x}$.

a) Vérifier que pour $h \neq 0$, $f(1+h) = \dfrac{2h + h^2}{1+h}$

b) Déduisez-en que f est dérivable en 1 et calculer $f'(1)$
c) Déterminer l'équation de la tangente à la courbe de f au point d'abscisse 1. ☞ Corrigé

Exercice 4 (d'après BAC ES 2010)

On considère la fonction f définie et dérivable sur l'intervalle [–2 ; 11], et on donne sa courbe représentative C_f dans un repère orthogonal $(O ; \vec{i}, \vec{j})$
On sait que la courbe C_f passe par les points $A(-2 ; 0,5)$, $B(0 ; 2)$, $C(2 ; 4,5)$, $D(4,5 ; 2)$, $E(7,5 ; 0)$ et $F(11 ; -0,75)$.
Les tangentes à la courbe C_f aux points A, B, C, D et F sont représentées sur la figure et aux points A, C et F, les tangentes sont parallèles à l'axe des abscisses.
Déterminer graphiquement : $f'(0)$; $f'(2)$ et $f'(4,5)$ ☞ Corrigé



5
4
3
2
1
0
A
B
D
E
F
-3
-2
-1
10
11
12

Corrigé 1

a) $\tau(h)=\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}=\dfrac{f(1+h)-f(1)}{h}$

$=\dfrac{-(1+h)^2+4-(-1^2+4)}{h}$

$=\dfrac{-h^2-2h}{h}$

$=-h-2$ (simplification par h non nul)

b) On calcule la limite du taux de variation quand $h\to 0$

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(1+h)-f(1)}{h}=\lim_{h\to 0}(-h-2)=-2 \text{ ; donc } f'(1)=-2$$

c) La tangente à la courbe au point d'abscisse a admet pour équation : $y=f'(a)(x-a)+f(a)$

On a : a= 1 ; $f'(a)=f'(1)=-2$ et $f(a)=f(1)=3$

D'où $y=-2(x-1)+3$ soit $y=-2x+5$

Par conséquent, la tangente au point d'abscisse 1 a pour équation $y=-2x+5$ Enoncé

Corrigé 2

a) $\tau(h)=\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}=\dfrac{f(1+h)-f(1)}{h}$

$=\dfrac{(2+h)^2-5(2+h)+4-(2^2-5\times 2+4)}{h}$

$=\dfrac{h^2-h}{h}$

$=h-1$ (simplification par h non nul)

b) On calcule la limite du taux de variation quand $h\to 0$

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(2+h)-f(2)}{h}=\lim_{h\to 0}(h-1)=-1 \text{ ; donc } f'(1)=-1$$

c) La tangente à la courbe au point d'abscisse a admet pour équation : $y=f'(a)(x-a)+f(a)$

On a : a= 2 ; $f'(a)=f'(2)=-1$ et $f(a)=f(2)=-2$

D'où $y=-(x-2)-2$ soit $y=-x$

Par conséquent, la tangente au point d'abscisse 2 a pour équation $y=-x$ Enoncé

Corrigé 3

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^*$ par : $f(x) = x-\dfrac{1}{x}$.

a) Vérifier que pour h $\neq 0$, $f(1+h) = \dfrac{2h + h^2}{1+h}$

b) Déduisez-en que f est dérivable en 1 et calculer $f'(1)$

c) Déterminer l'équation de la tangente à la courbe de f au point d'abscisse 1.

a) $f(1+h) = (1+h)-\dfrac{1}{1+h}$

$$= \frac{(1+h)^2-1}{1+h}$$

$$= \frac{h^2+2h}{1+h}$$

b) On calcule le taux de variation :

$$\tau(h) = \frac{f(a+h)-f(a)}{h} = \frac{f(1+h)-f(1)}{h}$$

$$= \frac{\frac{h^2+2h}{1+h} - 0}{h}$$

$$= \frac{h^2+2h}{h(1+h)}$$

$$= \frac{h+2}{1+h} \text{ (après simplification par h non nul)}$$

On calcule la limite du taux de variation quand $h \to 0$

$\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(1+h)-f(1)}{h} = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{h+2}{1+h} = 2$; donc la fonction f est bien dérivable en 1 et $f'(1) = 2$

c) La tangente à la courbe au point d'abscisse a admet pour équation : $y = f'(a)(x-a) + f(a)$

On a : a= 1 ; $f'(a) = f'(1) = 2$ et $f(a) = f(1) = 0$

D'où $y = 2(x-1) + 0$ soit $y = 2x-2$

Par conséquent, la tangente au point d'abscisse 2 a pour équation $y = 2x-2$ Enoncé

Corrigé 4

On sait que le nombre dérivé est égal au coefficient directeur de la tangente au point considéré.

- Comme la tangente en C est parallèle à l'axe des abscisses, alors $f'(2) = 0$

Pour calculer $f'(0)$, on choisit les points de la tangente B(0 ;2) et B' (1 ; 4), d'où

$f'(2) = \dfrac{y_{B'}-y_B}{x_{B'}-x_B} = \dfrac{4-2}{1-0} = 2$

De même, pour $f'(4,5)$, on a $f'(4,5) = \dfrac{y_{D'}-y_D}{x_{D'}-x_D} = \dfrac{0,5-2}{6-4,5} = -1$

Remarque : on peut également déterminer un vecteur directeur de la forme $\vec{u}(1;\ m)$ ce qui donne le coefficient directeur m Enoncé