Suites numériques

Exercice 1

On considère la suite (u_n) définie pour tout n par $u_0 = \frac{1}{3}$ et $u_{n+1} = \frac{u_n}{3u_n + 1}$

On admettra que pour tout entier naturel n, $u_n > 0$

1.

a) Calculer u_1 et u_2

b) Cette suite est-elle arithmétique ? Est-elle géométrique ?

2. Montrer que la suite (u_n) est décroissante

3. Soit la suite (v_n) définie par $v_n = \frac{1}{u_n}$.

a) Montrer que c'est une suite arithmétique dont on précisera la raison et le premier terme.

b) Exprimer v_n en fonction de n et montrer que pour tout n, $u_n = \frac{1}{3+3n}$

c) En utilisant cette dernière expression, retrouver le résultat de la question **2.**

☞ Corrigé 1

Exercice 2

On considère la suite (u_n) définie pour tout n par $u_0 = 6$ et $u_{n+1} = \frac{2}{3}u_n + 1$

1. **a)** Dans un repère orthonormé, représenter par construction à la règle les quatre premiers termes de (u_n) sur l'axe des abscisses (on tracera les droites d'équations $y = x$ et $y = \frac{2}{3}x + 1$)

b) Conjecture sur le sens de variation de cette suite.

2. Soit la suite (v_n) définie par $v_n = u_n - 3$.

a) Montrer que la suite (v_n) est une suite géométrique dont on précisera la raison et le premier terme

b) Exprimer v_n en fonction de n et montrer que pour tout n, $u_n = 3 \times \left(\frac{2}{3}\right)^n + 3$

c) A l'aide de ce résultat, démontrer la conjecture du **2. b)**

3. On pose pour tout n :

$$S_n = v_0 + v_1 + v_2 + \ .... + v_n \quad \text{et} \quad S_n' = u_0 + u_1 + u_2 + \ .... + u_n$$

a. Exprimer S_n en fonction de n

b. En déduire S_n' en fonction de n

☞ Corrigé 2

Exercice 3 (d'après bac ES, Liban 2014)

La médiathèque d'une petite ville a ouvert ses portes le 2 janvier 2013 et a enregistré 2500 inscriptions en 2013. Elle estime que, chaque année, 80 % des anciens inscrits renouvelleront leur inscription l'année suivante et qu'il y aura 400 nouveaux adhérents.
On modélise cette situation par une suite numérique (a_n)
On note a_0 =2500 le nombre d'inscrits à la médiathèque en 2013 et a_n représente le nombre d'inscrits à la médiathèque pendant l'année 2013 + n.

1. Justifier que, pour tout n, on a la relation $a_{n+1}=0,8\times a_n+400$.

2. On propose l'algorithme suivant :

```
VARIABLES :        N entier
                   A réel

INITIALISATION :   N prend la valeur 0
                   A prend la valeur 2500

TRAITEMENT :       Tant que A − 2000 > 50
                      A prend la valeur A × 0,8 + 400
                      N prend la valeur N + 1
                   Fin du Tant que

SORTIE :           Afficher N
```

a) Expliquer ce que permet de calculer cet algorithme.

b) À l'aide, de la calculatrice déterminer le résultat obtenu grâce à cet algorithme

☞ Corrigé 3

Corrigé 1

1. a) on a $u_1 = \dfrac{u_0}{3u_0+1} = \dfrac{1/3}{3\times\frac{1}{3}+1} = \dfrac{1}{6}$ et $u_2 = \dfrac{u_1}{3u_1+1} = \dfrac{1/6}{3\times\frac{1}{6}+1} = \dfrac{1}{9}$

b) - On a $u_2 - u_1 = \dfrac{1}{9} - \dfrac{1}{6} = -\dfrac{1}{18}$ et $u_1 - u_0 = \dfrac{1}{6} - \dfrac{1}{3} = -\dfrac{1}{6}$

Comme $u_2 - u_1 \neq u_1 - u_0$ alors (u_n) ne peut être arithmétique

- On a $\dfrac{u_2}{u_1} = \left(\dfrac{1}{9}\right) / \left(\dfrac{1}{6}\right) = \dfrac{2}{3}$ et $\dfrac{u_1}{u_0} = \left(\dfrac{1}{6}\right) / \left(\dfrac{1}{3}\right) = \dfrac{1}{2}$

Comme $\dfrac{u_2}{u_1} \neq \dfrac{u_1}{u_0}$ alors (u_n) ne peut être géométrique.

2. On étudie le signe de la différence $u_{n+1} - u_n$:

Pour tout n , $u_{n+1} - u_n = \dfrac{u_n}{3u_n+1} - u_n$. On met au même dénominateur :

$$= \frac{u_n}{3u_n+1} - \frac{u_n(3u_n+1)}{3u_n+1}$$

$$= \frac{-3(u_n)^2}{3u_n+1}$$

Or , pour tout entier naturel n, $u_n > 0$, donc $3u_n + 1 > 0$ et $-3(u_n)^2 < 0$

Donc $u_{n+1} - u_n < 0$ soit $u_{n+1} < u_n$ et par conséquent (u_n) strictement décroissante sur $\mathbb{N}$

3. a) Pour tout n, on a $v_{n+1} - v_n = \dfrac{1}{u_{n+1}} - \dfrac{1}{u_n}$ ($u_n > 0$ donc $u_n \neq 0$ pour tout n)

$$= \frac{3u_n+1}{u_n} - \frac{1}{u_n}$$

$$= \frac{3u_n}{u_n} = 3$$

Comme pour tout n , $v_{n+1} - v_n = 3$ alors, la suite (v_n) est arithmétique de raison r =3 et de premier terme $v_0 = \dfrac{1}{u_0} = 3$

b) (v_n) est arithmétique, donc $v_n = v_0 + nr$ soit $v_n = 3 + 3n$ pour tout n.

$v_n = \dfrac{1}{u_n}$ donc $u_n = \dfrac{1}{v_n} = \dfrac{1}{3+3n}$ (avec $v_n = 3 + 3n > 0$ donc non nul)

c) On peut soit étudier le signe de la différence, ou utiliser la fonction associée sur $\mathbb{R}^+$

Soit f la fonction associée définie sur $\mathbb{R}^+$ par $f(x) = \dfrac{1}{3+3x}$

C'est une fonction rationnelle dérivable sur $\mathcal{D}_f$. On a $f = \dfrac{1}{v}$ donc $f' = -\dfrac{v'}{v^2}$ avec $v(x) = 3x + 3$

… / …

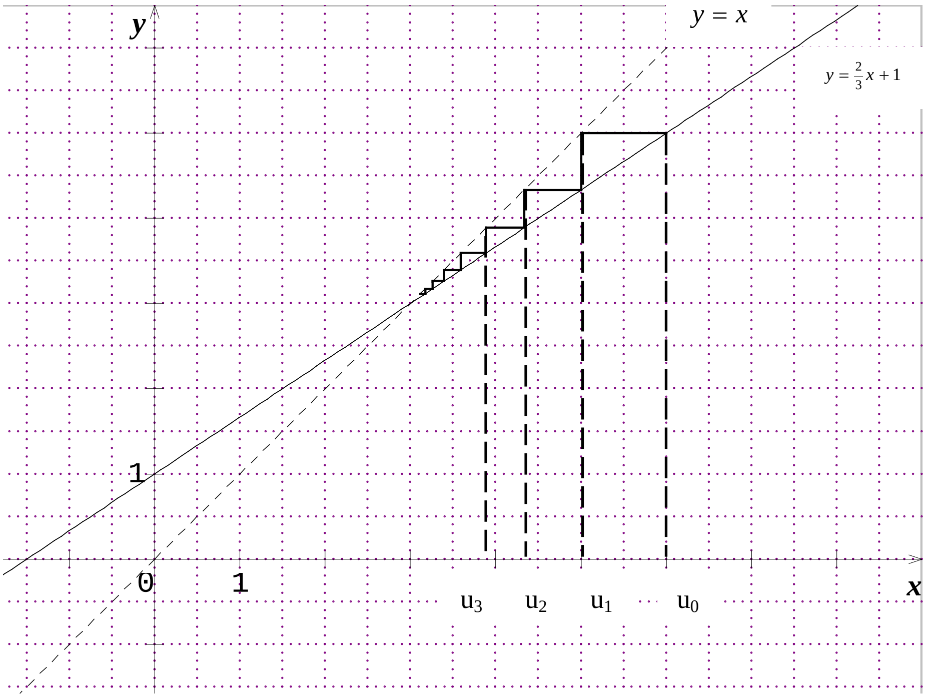
D'où $f'(x) = -\dfrac{3}{(3x+3)^2}$

Or pour tout $x \in \mathscr{D}_f$, $(3x+3)^2 > 0$, donc $f'(x) < 0$; donc la fonction f est strictement décroissante sur $\mathbb{R}^+$ et par conséquent, (u_n) strictement décroissante sur $\mathbb{N}$.

Exercice 1

Corrigé 2

1. a) représentation graphique



b) Graphiquement, on a $u_3 < u_2 < u_1 < u_0$, on peut conjecturer que cette suite est strictement décroissante.

2. a) On a (v_n) définie par $v_n = u_n - 3$.

Pour tout n, $v_{n+1} = u_{n+1} - 3$

$$v_{n+1} = \frac{2}{3}u_n + 1 - 3 \qquad \text{Or } v_n = u_n - 3 \text{ donc } u_n = v_n + 3$$

D'où $v_{n+1} = \frac{2}{3}(v_n + 3) - 2$ soit $v_{n+1} = \frac{2}{3}v_n$

Ce qui signifie que (v_n) est une suite géométrique de raison $q = \frac{2}{3}$ et de premier terme $v_0 = u_0 - 3 = 3$

b) (v_n) est une suite géométrique, donc $v_n = v_0 \times q^n$ soit $v_n = 3 \times \left(\frac{2}{3}\right)^n$ pour tout n.

Comme $u_n = v_n + 3$, alors, pour tout n, $u_n = 3 \times \left(\frac{2}{3}\right)^n + 3$

c) Pour le sens de variation, on étudie le signe de la différence

Pour tout n, $u_{n+1} - u_n = 3\times\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1} + 3 \quad - 3\times\left(\frac{2}{3}\right)^{n} - 3$

$= 3\times\left(\frac{2}{3}\right)^{n}\times\left(\frac{2}{3}\right) \quad - 3\times\left(\frac{2}{3}\right)^{n}$ ($a^{n+1} = a^n \times a$ en vertu de $a^n \times a^m = a^{n+m}$)

$= \left(\frac{2}{3}\right)^{n}\left[3\times\left(\frac{2}{3}\right) - 3\right]$ (on a factorisé par $\left(\frac{2}{3}\right)^{n}$)

$= \left(\frac{2}{3}\right)^{n}\times(-1)$

Comme $\left(\frac{2}{3}\right)^{n} > 0$ pour tout n, alors $u_{n+1} - u_n < 0$ ce qui signifie que la suite (u_n) est strictement décroissante sur $\mathbb{N}$; ce qui confirme la conjecture.

Remarque : la fonction associée est définie par $f(x) = 3\times\left(\frac{2}{3}\right)^{x} + 3$, c'est une fonction exponentielle qui sera abordée en TS.

3. **a**) On pose pour tout n : $S_n = v_0 + v_1 + v_2 + \ .... + v_n$

On sait que (v_n) est une suite géométrique de raison $q = \frac{2}{3}$ et $v_0 = 3$

Pour tout $n \in N$, S_n est la somme des $n+1$ premiers termes consécutifs d'une suite géométrique de raison $q \neq 1$ donc:

$$S_n = 1^{ier}\ \text{terme}\times\frac{1-q^{nbtermes}}{1-q} = v_0\times\frac{1-q^{n+1}}{1-q} = 3\times\frac{1-\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}}{1-\frac{2}{3}} = 9\times\left(1-\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}\right)$$

b) Pour tout $n \in N$, $u_n = v_n + 3$ donc:

$$\begin{aligned} S'_n &= u_0 + u_1 + u_2 + \cdots u_n \\ &= (v_0+3) + (v_1+3) + (v_2+3) + \cdots (v_n+3) \\ &= S_n + 3(n+1) \\ &= 9\times\left(1-\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}\right) + 3(n+1) \end{aligned}$$

Enoncé

Corrigé 3

1. On modélise de la manière suivante :

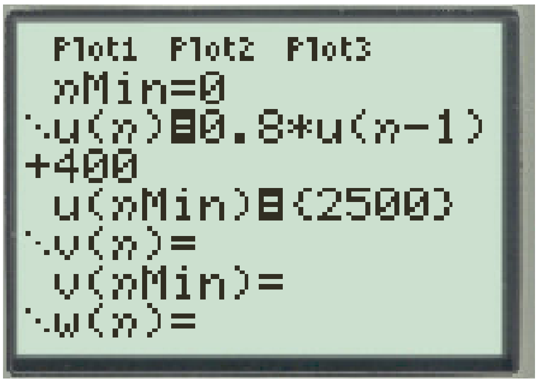
$$\begin{pmatrix}\text{Nombre d'adhérents} \\ \text{à une année donnée}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\text{Nombre d'adhérents} \\ \text{de l' année précédente}\end{pmatrix} \times \frac{80}{100} + \textit{nombre}\ \text{de nouveaux adhérents}$$

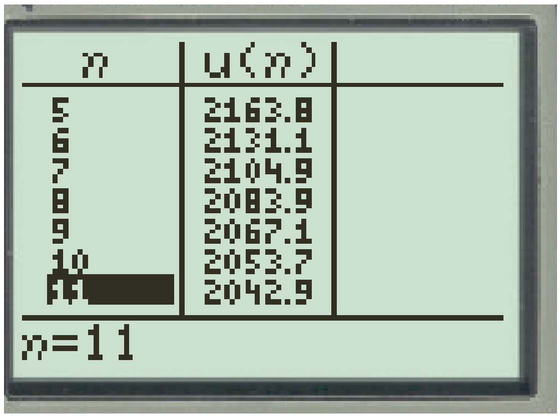
Soit $a_{n+1} = a_n \times 0{,}8 + 400.$

2. Dans le contexte, N correspond à l'entier n et le nombre A correspond au terme a_n de la suite. On voit également que $a_0 = 2500$

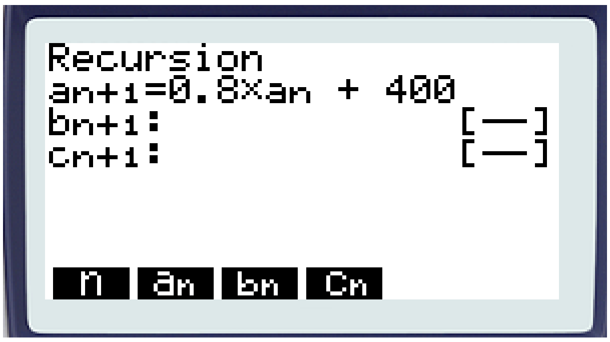
a) Dans le traitement : « Tant que $A - 2000 > 50$ » peut s'écrire **« Tant que $A > 2050$ »**
Cet algorithme permet donc de trouver la valeur de n à partir de laquelle $a_n \leqslant 2050$

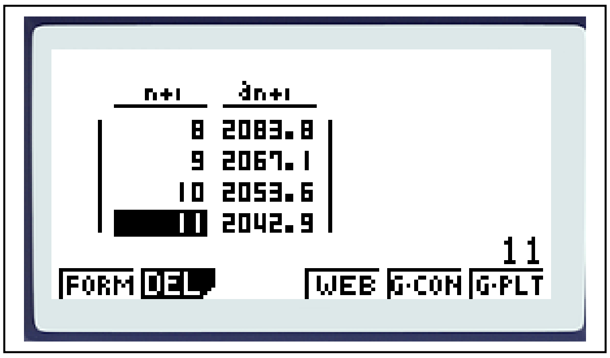
b) Sur la calculatrice, on saisit l'expression de la suite : $a_{n+1} = a_n \times 0{,}8 + 400$ et $a_0 = 2500$
Dans la table des valeurs, on détermine la valeur de n à partir de laquelle on a $a_n \leqslant 2050$





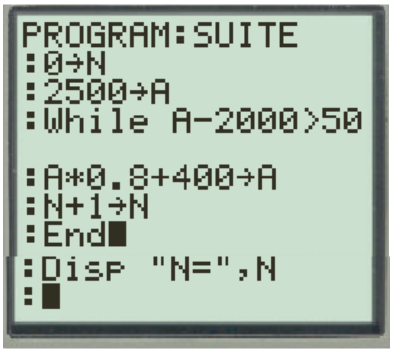
Sur TI



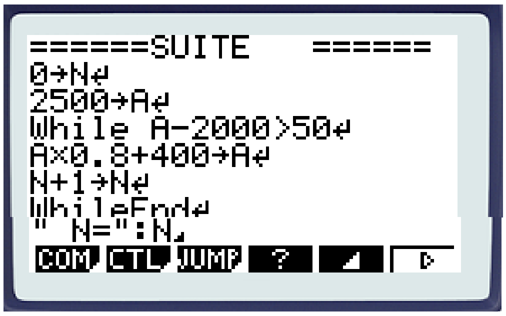


On en déduit qu'à partir du rang 11, on a $a_n \leqslant 2050$
Ce qui signifie qu'à partir de 2013 +11, soit 2024, le nombre d'adhérents sera inférieur à 2050 personnes.

Remarque : on peut écrire un programme qui donnera ce résultat

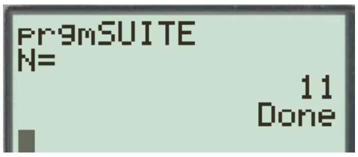


Programme TI



programme Casio

Résultat :



[Enoncé](#)