Trigonométrie

I. Quelques rappels de cours

1. Angles associés

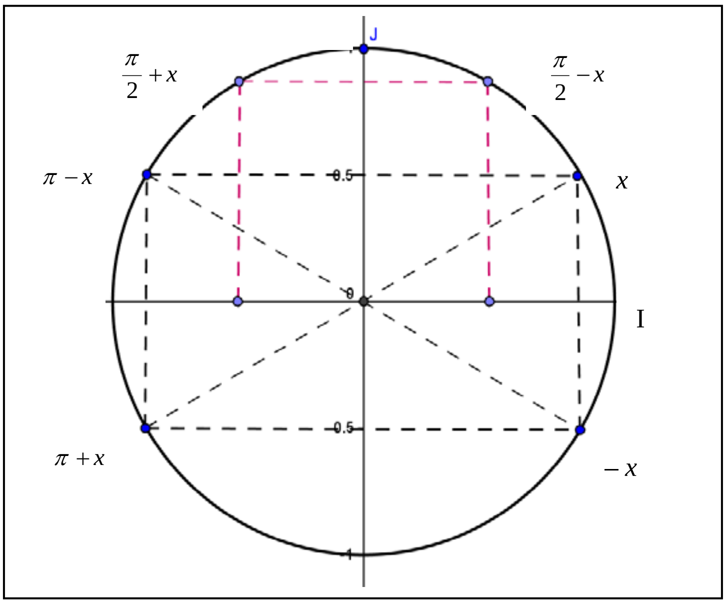
A. Périodicité

- cos $(x + k\times 2\pi) =$ cos (x) ,

La fonction cosinus est périodique et sa période est T = 2π *

- sin $(x + k\times 2\pi) =$ sin (x) .

La fonction sinus est périodique et sa période est T = 2π



B. Angles associés

- $\cos(-x) = \cos(x)$ et $\sin(-x) = -\sin(x)$
- $\cos(\pi - x) = -\cos(x)$ **et** $\sin(\pi - x) = \sin(x)$
- $\cos(\pi + x)) = -\cos(x)$ et $\sin(\pi + x) = -\sin(x)$
- $\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=\sin x \qquad \sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=\cos x$
- $\cos\left(\frac{\pi}{2}+x\right)=-\sin x \qquad \sin\left(\frac{\pi}{2}+x\right)=\cos x$

* x et $(x + k\times 2\pi)$ correspondent au même point sr le cercle trigonométrique.
2π est la plus petite périodee.

2. Formules d'addition :

Pour tous réels a et b,

$$\cos(a-b) = \cos(a)\cos(b) + \sin(a)\sin(b)$$

$$\sin(a-b) = \sin(a)\cos(b) - \cos(a)\sin(b)$$

Ces égalités étant valables pour tous réels a et b, en remplaçant b par –b, on obtient alors :

$$\cos(a+b) = \cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b)$$

$$\sin(a+b) = \sin(a)\cos(b) + \cos(a)\sin(b)$$

3. Valeurs remarquables

α	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\sin\alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\cos\alpha$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0

Relation fondamentale : pour tout x : $\cos^2(x) + \sin^2(x) = 1$

Exercice 1 Vrai ou faux, mais justifier !

$a)\ \cos(\pi - x) = \cos(x - \pi)$ $b)\ \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos(-x)$

$c)\ \sin\left(\frac{3\pi}{2} + x\right) = \cos(-x)$ $d)\ \cos(\pi + x) = \sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right)$

$e)\ \sin(\pi + x) = \cos\left(\frac{3\pi}{2} - x\right)$ $f)\ \cos\frac{3\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

☞ Corrigé 1

Exercice 2

Calculer les valeurs exactes des lignes trigonométriques suivantes :

1. a) $\cos\left(\frac{5\pi}{6}\right)$ b) $\sin\left(\frac{7\pi}{6}\right)$ c) $\cos\left(\frac{13\pi}{6}\right)$ d) $\sin\left(-\frac{19\pi}{6}\right)$

2. a) $\cos\left(\frac{7\pi}{3}\right)$ b) $\sin\left(\frac{13\pi}{3}\right)$ c) $\cos\left(-\frac{19\pi}{3}\right)$ d) $\sin\left(-\frac{23\pi}{3}\right)$

3. a) $\cos\left(\frac{11\pi}{4}\right)$ b) $\sin\left(-\frac{17\pi}{4}\right)$ c) $\cos\left(\frac{29\pi}{4}\right)$ d) $\sin\left(-\frac{123\pi}{4}\right)$

☞ Corrigé 2

Exercice 3

1. On donne $\cos\left(\frac{\pi}{5}\right) = \frac{1+\sqrt{5}}{4}$. **En déduire** : $\sin\left(\frac{\pi}{5}\right)$, $\cos\left(\frac{4\pi}{5}\right)$; $\cos\left(\frac{9\pi}{5}\right)$ et $\sin\left(\frac{3\pi}{10}\right)$

2. En remarquant que $\frac{\pi}{12} = \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4}$, calculer :

$\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)$ et $\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)$ (☞ formules d'addition)

3. Calculer de façon similaire $\cos\left(\frac{7\pi}{12}\right)$ et $\sin\left(\frac{7\pi}{12}\right)$

Expliquer pourquoi $\cos\left(\frac{7\pi}{12}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{12}\right)$

☞ **Corrigé 3**

Exercice 4

Résoudre dans l'intervalle **] –π ; π]**

a) $\begin{cases} \cos x = \frac{1}{2} \\ \sin x = -\frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases}$ b) $\begin{cases} \cos x = -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \sin x = -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}$ c) $\begin{cases} \cos x = -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \sin x = \frac{1}{2} \end{cases}$ d) $\begin{cases} \cos x = -\frac{1}{2} \\ \sin x = -\frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases}$

☞ **Corrigé 4**

Corrigé 1

a) $\cos(\pi - x) = \cos(x - \pi)$?

On a $(\pi - x)$ *et* $(x - \pi)$ sont des mesures d'angles opposés ($(\pi - x) = -(x - \pi)$).
Donc, d'après les angles associés (règle $\cos(-X) = \cos(X)$), on a $\cos(\pi - x) = \cos(x - \pi)$
donc vrai

b) $\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos(-x)$?

On sait que $\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos(x)$ et $\cos(-x) = \cos(x)$

Donc, $\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos(-x)$, donc vrai

c) $\sin\left(\frac{3\pi}{2} + x\right) = \cos(-x)$?

On a : $\sin\left(\frac{3\pi}{2} + x\right) = \sin\left(\frac{4\pi}{2} - \frac{\pi}{2} + x\right) = \sin\left(-\frac{\pi}{2} + x\right)$

$= -\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$ (angles opposés : sin(X) = –sin(–X))

$= -\cos(x)$

Or $\cos(-x) = \cos(x)$, donc $\sin\left(\frac{3\pi}{2} + x\right) \neq \cos(-x)$ et donc faux !

d) $\cos(\pi + x) = \sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right)$?

On a d'une part $\cos(\pi + x) = -\cos(x)$ et, d'autre part : $\sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos(x)$

Donc l'assertion est fausse.

e) $\sin(\pi + x) = \cos\left(\frac{3\pi}{2} - x\right)$?

On a d'une part : $\sin(\pi + x) = -\sin(x)$;

et d'autre part, $\cos\left(\frac{3\pi}{2} - x\right) = \cos\left(-\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = -\sin(x)$

donc l'assertion est vraie.

f) $\cos\frac{3\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$?

On a $\cos\left(\frac{3\pi}{4}\right) = \cos\left(\frac{4\pi}{4} - \frac{\pi}{4}\right) = \cos\left(\pi - \frac{\pi}{4}\right) = -\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$, donc vrai !

Exercice 1

Corrigé 2

1.

a) $\cos\left(\frac{5\pi}{6}\right) = \cos\left(\frac{6\pi}{6} - \frac{\pi}{6}\right) = \cos\left(\pi - \frac{\pi}{6}\right) = -\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ ☞ $\cos(\pi - x) = \cos(x)$

b) $\sin\left(\frac{7\pi}{6}\right) = \sin\left(\pi + \frac{\pi}{6}\right) = -\sin\left(\frac{\pi}{6}\right) = -\frac{1}{2}$ ☞ $\sin(\pi + x) = -\sin(x)$

c) $\cos\left(\frac{13\pi}{6}\right) = \cos\left(\frac{12\pi}{6} + \frac{\pi}{6}\right) = \cos\left(2\pi + \frac{\pi}{6}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$ ☞ périodicité

d) $\sin\left(-\frac{19\pi}{6}\right) = \sin\left(-3\pi - \frac{\pi}{6}\right) = \sin\left(-2\pi - \pi - \frac{\pi}{6}\right) = \sin\left(-\pi - \frac{\pi}{6}\right) = \sin\left(\pi - \frac{\pi}{6}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2}$

(les mesures π et $-\pi$ correspondent au même du cercle trigo.)

2.

a) $\cos\left(\frac{7\pi}{3}\right) = \cos\left(\frac{6\pi}{3} + \frac{\pi}{3}\right) = \cos\left(2\pi + \frac{\pi}{3}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}$ ☞ périodicité

b) $\sin\left(\frac{13\pi}{3}\right) = \sin\left(4\pi + \frac{\pi}{3}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{2}}{3}$

c) $\cos\left(-\frac{20\pi}{3}\right) = \cos\left(-\frac{21\pi}{3} + \frac{\pi}{3}\right) = \cos\left(-7\pi + \frac{\pi}{3}\right) = \cos\left(-\pi + \frac{\pi}{3}\right) = \cos\left(\pi + \frac{\pi}{3}\right) = -\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}$

d) $\sin\left(-\frac{25\pi}{3}\right) = \sin\left(-8\pi - \frac{\pi}{6}\right) = \sin\left(-\frac{\pi}{6}\right) = -\sin\left(\frac{\pi}{6}\right) = -\frac{1}{2}$ ☞ $\sin(-x) = -\sin(x)$

3.

a) $\cos\left(\frac{11\pi}{4}\right) = \cos\left(\frac{12\pi}{4} - \frac{\pi}{4}\right) = \cos\left(3\pi - \frac{\pi}{4}\right) = \cos\left(2\pi + \pi - \frac{\pi}{4}\right) = \cos\left(\pi - \frac{\pi}{4}\right) = -\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

b) $\sin\left(-\frac{17\pi}{4}\right) = \sin\left(-\frac{16\pi}{4} - \frac{\pi}{4}\right) = \sin\left(-4\pi - \frac{\pi}{4}\right) = \sin\left(-\frac{\pi}{4}\right) = -\sin\left(\frac{\pi}{4}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

c) $\cos\left(\frac{29\pi}{4}\right) = \cos\left(\frac{28\pi}{4} + \frac{\pi}{4}\right) = \cos\left(7\pi + \frac{\pi}{4}\right) = \cos\left(\pi + \frac{\pi}{4}\right) = -\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

d) $\sin\left(-\frac{123\pi}{4}\right) = \sin\left(-31\pi + \frac{\pi}{4}\right) = \sin\left(-30\pi - \pi + \frac{\pi}{4}\right) = \sin\left(-\pi + \frac{\pi}{4}\right) = \sin\left(\pi + \frac{\pi}{4}\right) = -\sin\left(\frac{\pi}{4}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

Exercice 2

Corrigé 3

1.

○ D'après la relation $\cos^2(x) + \sin^2(x) = 1$

- $\sin^2\left(\dfrac{\pi}{5}\right) = 1 - \cos^2\left(\dfrac{\pi}{5}\right) = 1 - \left(\dfrac{\sqrt{5}+1}{4}\right)^2 = 1 - \dfrac{6+2\sqrt{5}}{16} = \dfrac{10-2\sqrt{5}}{16}$

Comme $\dfrac{\pi}{5}$ appartient au premier quadrant, donc $\sin\left(\dfrac{\pi}{5}\right) > 0$ alors,

$$\sin\left(\frac{\pi}{5}\right) = \sqrt{\frac{10-2\sqrt{5}}{16}} = \frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4}$$

○ D'après les angles associés :

- $\cos\left(\dfrac{4\pi}{5}\right) = \cos\left(\dfrac{5\pi}{5} - \dfrac{\pi}{5}\right) = \cos\left(\pi - \dfrac{\pi}{5}\right) = -\cos\dfrac{\pi}{5} = -\dfrac{\sqrt{5}+1}{4}$
-

$$\cos\left(\frac{9\pi}{5}\right) = \cos\left(\frac{10\pi}{5} - \frac{\pi}{5}\right) = \cos\left(2\pi - \frac{\pi}{5}\right)$$

$$= \cos\left(-\frac{\pi}{5}\right) \qquad \text{(Périodicité)}$$

$$= \cos\left(\frac{\pi}{5}\right) = \frac{\sqrt{5}+1}{4}$$

- $\sin\left(\dfrac{3\pi}{10}\right) = \sin\left(\dfrac{5\pi}{10} - \dfrac{2\pi}{10}\right) = \sin\left(\dfrac{\pi}{2} - \dfrac{\pi}{5}\right) = \cos\dfrac{\pi}{5} = \dfrac{\sqrt{5}+1}{4}$

2. D'après les formules d'addition : $\cos(a+b) = \cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b)$

- $$\cos\left(\frac{\pi}{12}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4}\right) = \cos\frac{\pi}{3}\times\cos\frac{\pi}{4} + \sin\frac{\pi}{3}\times\sin\frac{\pi}{4} \qquad (\ )$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2}\times\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}\times\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{4} + \frac{\sqrt{6}}{4}$$

- $$\sin\left(\frac{\pi}{12}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4}\right) = \cos\frac{\pi}{3}\times\sin\frac{\pi}{4} - \cos\frac{\pi}{4}\times\sin\frac{\pi}{3} \qquad (\ )$$

$$= \frac{1}{2}\times\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}\times\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{4} - \frac{\sqrt{6}}{4}$$

3. On remarque que $\frac{7\pi}{12} = \frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{4}$, d'où, d'après les formules d'addition :

$$\cos\left(\frac{7\pi}{12}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{4}\right) = \cos\frac{\pi}{3}\times\cos\frac{\pi}{4} - \sin\frac{\pi}{3}\times\sin\frac{\pi}{4}$$
$$= \frac{\sqrt{2}}{2}\times\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}\times\frac{\sqrt{3}}{2}$$
$$= \frac{\sqrt{2}}{4} - \frac{\sqrt{6}}{4}$$

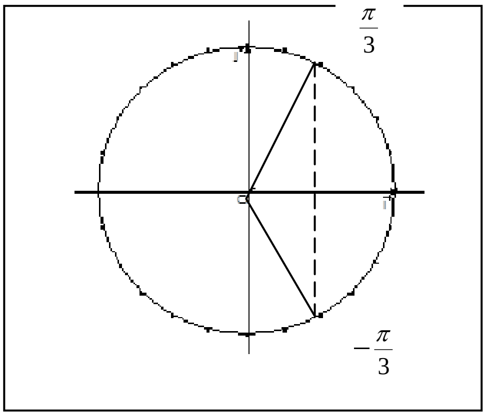
$$\sin\left(\frac{7\pi}{12}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{4}\right) = \cos\frac{\pi}{3}\times\sin\frac{\pi}{4} + \sin\frac{\pi}{3}\times\cos\frac{\pi}{4}$$
$$= \frac{1}{2}\times\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\times\frac{\sqrt{2}}{2}$$
$$= \frac{\sqrt{2}}{4} + \frac{\sqrt{6}}{4}$$

On justifie l'égalité $\cos\left(\frac{7\pi}{12}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{12}\right)$

On a $\cos\left(\frac{7\pi}{12}\right) = \cos\left(\frac{6\pi}{12} + \frac{\pi}{12}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{12}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{12}\right)$ (d'après les angles associés)

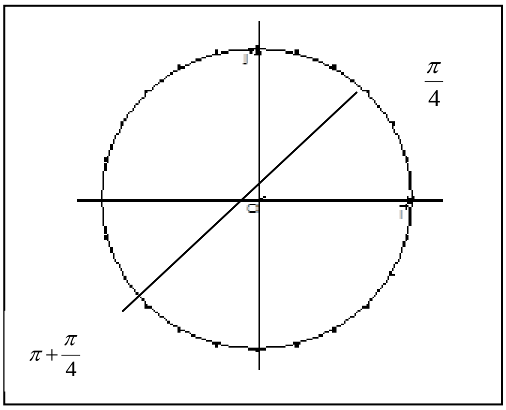
Exercice 3

Corrigé 4



a) $\begin{cases} \cos\ x = \frac{1}{2} \\ \sin x = -\frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases}$

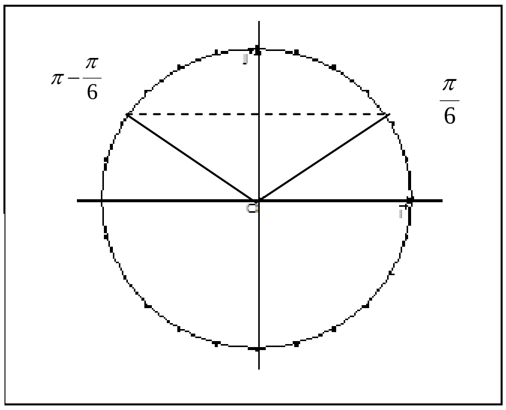
On sait que cos $\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}$, donc l'angle cherché est associé à $\frac{\pi}{3}$. Comme son sinus est négatif, le point associé se trouve dans quatrième quadrant. On trace le cercle trigo et on a : $x = -\frac{\pi}{3}$ dans $]-\pi\ ;\ \pi]$



b) $\begin{cases} \cos x = -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \sin x = -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}$

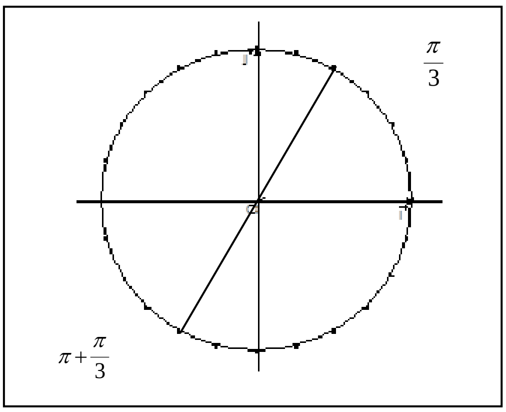
On sait que cos $\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$, donc l'angle cherché est associé à $\frac{\pi}{4}$. Comme son cosinus et son sinus sont négatifs, le point associé se trouve dans troisième quadrant. On trace le cercle trigo et on a : $x = \pi + \frac{\pi}{4} = \frac{5\pi}{4}$

Une autre mesure est $\frac{5\pi}{4} - 2\pi = -\frac{3\pi}{4}$ dans $]-\pi\ ;\ \pi]$



c) $\begin{cases} \cos x = -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \sin x = \frac{1}{2} \end{cases}$

On sait que sin $\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2}$, donc l'angle cherché est associé à $\frac{\pi}{6}$. Comme son cosinus est négatif, le point associé se trouve dans deuxième quadrant. On trace le cercle trigo et on a : $x = \pi - \frac{\pi}{6} = \frac{5\pi}{6}$ dans $]-\pi\ ;\ \pi]$



d) $\begin{cases} \cos x = -\frac{1}{2} \\ \sin x = -\frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases}$

On sait que cos $\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}$, donc l'angle cherché est associé à $\frac{\pi}{3}$. Comme son cosinus et son sinus sont négatifs, le point associé se trouve dans troisième quadrant. On trace le cercle trigo et on a : $x = \pi + \frac{\pi}{3} = \frac{4\pi}{3}$

Une autre mesure est $\frac{4\pi}{3} - 2\pi = -\frac{2\pi}{3}$ dans $]-\pi\ ;\ \pi]$

Exercice 4