Fonctions polynômes

Quelques rappels de cours :

- Toute fonction polynôme est dérivable sur $\mathbb{R}$
- Un polynôme du second degré a toujours le signe du coefficient a, sauf entre les racines quand elles existent
- Le nombre dérivé est égal au coefficient directeur de la tangente au point considéré.
- Soient f et g deux fonctions définies respectivement sur $\mathscr{D}_f$ et $\mathscr{D}_g$ Pour étudier la position relative de deux courbes $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ sur un intervalle I inclus dans $\mathscr{D}_f$ et dans $\mathscr{D}_g$, on étudie le signe de la différence $f(x)-g(x)$ sur cet intervalle I .

EXERCICE 1

On considère la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=-x^3+4x^2+11x-20$ et $\mathscr{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère $(O;\vec{i},\vec{j})$

1. Calculer la dérivée $f'(x)$, étudier son signe et dresser le tableau de variation de f.
2. Etablir l'équation de la tangente à la courbe de f au point d'abscisse 0
3. Déterminer les abscisses des points de la courbe où la tangente a pour coefficient directeur – 5.
4. La droite d'équation $y=8x-2$ est-elle tangente à la courbe de f ? Si oui, en quel point ?
5. On considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x)=-x^3$ et $\mathscr{C}_g$ sa courbe représentative dans le repère $(O;\vec{i},\vec{j})$. Etudier la position relative des courbes $\mathscr{C}_f$ *et* $\mathscr{C}_g$ sur $\mathbb{R}$ ☞ Corrigé 1

EXERCICE 2

On considère la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=-x^3+3x^2+9x-10$ et $\mathscr{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère orthogonal $(O;\vec{i},\vec{j})$

1. Calculer la dérivée $f'(x)$, étudier son signe et dresser le tableau de variation de f.
2. Etablir l'équation de la tangente à la courbe de f au point d'abscisse 0
3. Déterminer les abscisses des points de la courbe où la tangente a pour coefficient directeur 3
4. La droite d'équation $y=-15x-2$ est-elle tangente à la courbe de f ? Si oui, en quel point ?
5. On considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x)=-x^3+2$ et $\mathscr{C}_g$ sa courbe représentative dans le repère $(O;\vec{i},\vec{j})$. Etudier la position relative des courbes $\mathscr{C}_f$ *et* $\mathscr{C}_g$ sur $\mathbb{R}$. ☞ Corrigé 2

EXERCICE 3

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$, par $f(x) = 3x^4+4x^3-12x^2-10$.

On appelle $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans u repère orthogonal $(\mathrm{O},\vec{i};\vec{j})$

1. Calculer $f'(x)$ et factoriser l'expression obtenue.
2. Etudier le signe de $f'(x)$ à l'aide d'un tableau de signes et dresser le tableau de variation de f.
3. Etablir l'équation de la tangente à la courbe de f au point d'abscisse –1 . ☞ Corrigé 3

Corrigé 1

1. La fonction f est une fonction polynôme dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel x :
   $f'(x) = -3x^2 + 8x + 11$

C'est un trinôme, $\Delta = b^2 - 4ac = 196$, donc deux racines $x_1 = \dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{11}{3}$ et $x_2 = \dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = -1$

D'où le tableau de variation :

x	-∞		-1		$\frac{11}{3}$		+ ∞
$f'(x)$		$-$	0	+	0	$-$	
f	↘		-26	↗	$\frac{670}{27}$	↘	

2. La tangente a une équation de la forme $y = f'(a)(x-a) + f(a)$
   On a : a = 0 $f'(a) = f'(0) = 11$ et $f(a) = f(0) = -20$
   D'où $y = 11(x-0) - 20$ donc la tangente au point d'abscisse 0 a pour équation $y = 11x - 20$

3. On sait que le coefficient directeur de la tangente est égal au nombre dérivé au point considéré.
   D'où : $f'(x) = -5$
   Ce qui équivaut à $-3x^2 + 8x + 11 = -5$ soit $-3x^2 + 8x + 16 = 0$

C'est une équation du second degré : $\Delta = b^2 - 4ac = 196$, donc deux racines

$$x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = 4 \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = -\frac{4}{3}$$

Conclusion : aux points d' abscisses 4 et $-\frac{4}{3}$ la tangente à la courbe a pour coefficient directeur – 5.

4. La droite d'équation $y = 8x - 2$ est-elle tangente à la courbe de f ? Si oui, en quel point ?
   Déterminons les abscisses des points de la courbe où le coefficient directeur de la tangente vaut 8 :
   On résout l'équation $f'(x) = 8$
   Ce qui équivaut à $-3x^2 + 8x + 11 = 8$ soit $-3x^2 + 8x + 3 = 0$

C'est une équation du second degré : $\Delta = b^2 - 4ac = 100$, donc deux racines

$$x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = 3 \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = -\frac{1}{3}$$

Donc, aux points d'abscisses 3 et $-\frac{1}{3}$ la tangente à la courbe a pour coefficient directeur 8.

Calculons les ordonnées de ces deux points d'après l'équation de la courbe $y = -x^3 + 4x^2 + 11x - 20$

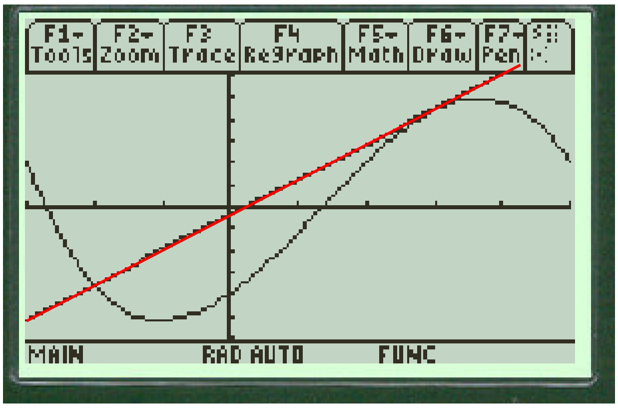
$$y_1 = -3^3 + 4\times 3^2 + 11\times 3 - 20 = 22 \quad \text{et} \quad y_2 = -\left(-\frac{1}{3}\right)^3 + 4\times\left(-\frac{1}{3}\right)^2 + 11\times\left(-\frac{1}{3}\right) - 20 = -\frac{626}{27}$$

On note ces points A (3 ; 22) et $B\left(-\frac{1}{3} ; -\frac{626}{27}\right)$ et (D) la droite d'équation $y = 8x - 2$

Les coordonnées de ces points vérifient-elles l'équation de la droite D ?

- Pour $x = 3$, on a $y = 8\times 3 - 2 =$ 22 donc $A \in D$
- Pour $x = -\frac{1}{3}$, on a $y = 8\times\left(-\frac{1}{3}\right) - 2 = -\frac{14}{3}$ donc $B \notin D$

- En conclusion, la droite d'équation $y = 8x - 2$ est tangente à la courbe au point d'abscisse 3



On peut vérifier le sens de variation et le fait que la droite d'équation $y = 8x - 2$ (en rouge sur le graphique) soit une tangente à la courbe au point d'abscisse 3 à l'aide d'une calculatrice graphique

5. Pour étudier la position relative des courbes $\mathscr{C}_f$ *et* $\mathscr{C}_g$, on étudie le signe de la différence $f(x) - g(x)$ sur $\mathbb{R}$
   Pour tout réel x ,

$$f(x) - g(x) = -x^3 + 4x^2 + 11x - 20 - (-x^3)$$
$$= 4x^2 + 11x - 20$$

C'est un trinôme, $\Delta = b^2 - 4ac = 441$, donc deux racines $x_1 = \dfrac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = -4$ et $x_2 = \dfrac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{5}{4}$

D'où le tableau de signes et de conséquences :

x	$-\infty$		-4		$\frac{5}{4}$		$+\infty$
Signe de $f(x) - g(x)$		+	0	–	0	+	
conséquence		*$\mathscr{C}_f$ au-dessus de $\mathscr{C}_g$*	Intersection	*$\mathscr{C}_f$ au-dessous de $\mathscr{C}_g$*	Intersection	*$\mathscr{C}_f$ au-dessus de $\mathscr{C}_g$*	

Enoncé

Corrigé 2

1. La fonction f est une fonction polynôme dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel x :
   $f'(x) = -3x^2 + 6x + 9$

C'est un trinôme, $\Delta = b^2 - 4ac = 144$, donc deux racines $x_1 = \dfrac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = 3$ et $x_2 = \dfrac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = -1$

D'où le tableau de variation :

x	$-\infty$		-1		3		$+\infty$
$f'(x)$		–	0	+	0	–	
f		↘	-15	↗	17	↘	

2. La tangente a une équation de la forme $y = f'(a)(x - a) + f(a)$
   On a : a = 0 $f'(a) = f'(0) = 9$ et $f(a) = f(0) = -10$

D'où $y = 9(x-0)-10$ donc la tangente au point d'abscisse 0 a pour équation $y = 9x-10$

3. On sait que le coefficient directeur de la tangente est égal au nombre dérivé au point considéré.
D'où : $f'(x) = 3$

Ce qui équivaut à $-3x^2+6x+9 = 3$ soit $-3x^2+6x+6 = 0$

C'est une équation du second degré : $\Delta = b^2-4ac = 108$, donc deux racines

$$x_1 = \frac{-6-\sqrt{108}}{-6} = \frac{6}{6} + \frac{\sqrt{36\times 3}}{6} = 1+\sqrt{3} \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = 1-\sqrt{3}$$

Donc, aux points d'abscisses $1+\sqrt{3}$ et $1-\sqrt{3}$ la tangente à la courbe a pour coefficient directeur 3.

4. La droite d'équation $y = -15x-2$ est-elle tangente à la courbe de f ? Si oui, en quel point ?
Déterminons les abscisses des points de la courbe où le coefficient directeur de la tangente vaut –15 :
On résout l'équation $f'(x) = -15$

Ce qui équivaut à $-3x^2+6x+9 = -15$ soit $-3x^2+6x+24 = 0$

C'est une équation du second degré : $\Delta = b^2-4ac = 324$, donc deux racines

$$x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = 4 \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = -2$$

Donc, aux points d'abscisses 4 et -2 la tangente à la courbe a pour coefficient directeur –15.

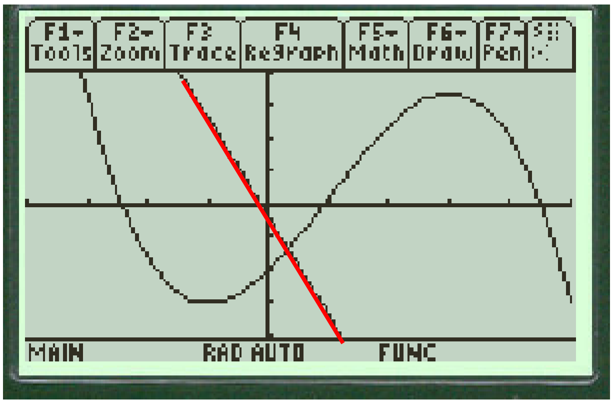
Calculons les ordonnées de ces deux points d'après l'équation de la courbe $y = -x^3+3x^2+9x-10$

$y_1 = -4^3+3\times 4^2+9\times 4-10 = 10$ et $y_2 = -(-2)^3+3\times(-2)^2+9\times(-2)-10 = -8$

On note ces points A (4 ; 10) et B (–2 ; – 8) et (D) la droite d'équation $y = -15x-2$

Les coordonnées de ces points vérifient-elles l'équation de la droite d'équation $y = -15x-2$?

- Pour $x = 4$, on a $y = -15\times 4-2 = -62$ donc $A \notin D$
- Pour $x = -2$, on a $y = -15\times(-2)-2 = 28$ donc $B \notin D$
- En conclusion, la droite d'équation $y = -15x-2$ n'est pas tangente à la courbe (c'est une droite qui est parallèle aux tangentes aux points d'abscisses 4 et –2)



On peut vérifier le sens de variation et le fait que la droite d'équation $y = -15x-2$ (en rouge sur le graphique) ne soit pas une tangente à la courbe sur une calculatrice graphique

5. Pour étudier la position relative des courbes $\mathscr{C}_f$ *et* $\mathscr{C}_g$, on étudie le signe de la différence on étudie le signe de la différence $f(x)-g(x)$ sur $\mathbb{R}$

Pour tout réel *x*,

$$f(x)-g(x) = -x^3+3x^2+9x-10 - (-x^3+2)$$
$$= 3x^2+9x-12$$

C'est un trinôme, $\Delta = b^2-4ac = 225$, donc deux racines $x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = -4$ et $x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = 1$

D'où le tableau de signes et de conséquences :

x	$-\infty$		-4		1		$+\infty$
Signe de $f(x)-g(x)$		+	0	–	0	+	
conséquence	$\mathscr{C}_f$ au-dessus de $\mathscr{C}_g$		Intersection	$\mathscr{C}_f$ au-dessous de $\mathscr{C}_g$	Intersection	$\mathscr{C}_f$ au-dessus de $\mathscr{C}_g$	

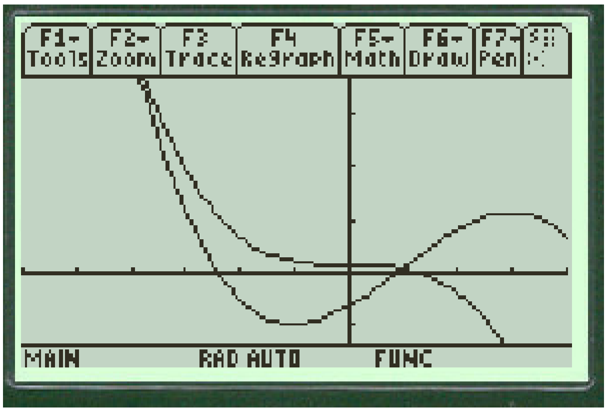


Illustration de la position relative des deux courbes sur écran calculatrice

Enoncé 2

Corrigé 3

1. La fonction f est une fonction polynôme, donc dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel x :
   $$f'(x) = 12x^3 + 12x^2 - 24x$$
   Le facteur commun est $12x$ (on peut éventuellement factoriser par x ou par $2x$ ou encore par $4x$)
   On a donc $f'(x) = 12x\,(\,x^2 + x - 2)$ pour tout réel x.
2. Pour dresser le tableau de signes, on calcule les racines :
   - $12x = 0$ ssi $x = 0$
   - $x^2 + x - 2 = 0$ $\Delta = b^2 - 4ac = 9$, donc deux racines $x_1 = \dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = -2$ et $x_2 = \dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = 1$

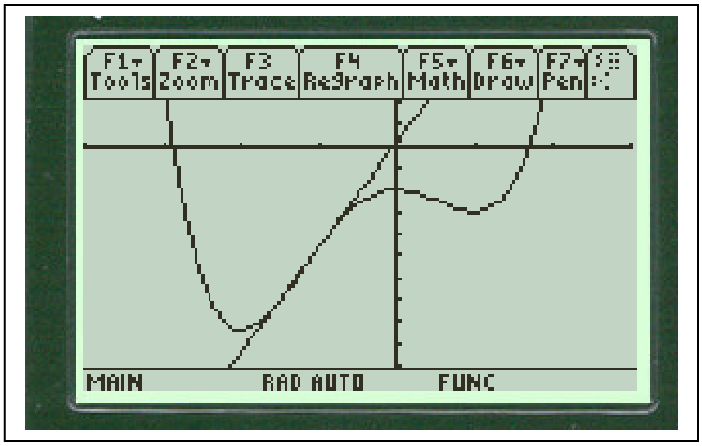
x	$-\infty$		-2		0		1		$+\infty$
Signe de $12x$		–		–	0	+		+	
Signe de x^2+x-2		+	0	–		–	0	+	
Signe $f'(x)$		–	0	+	0	–	0	+	
Variation de f		↘	-42	↗	-10	↘	-15	↗	

3. La tangente a une équation de la forme $y = f'(a)(x-a) + f(a)$

On a : a = –1 $f'(a) = f'(-1) = 24$ et $f(a) = f(-1) = -23$

D'où $y = 24(x+1) - 23$ donc la tangente au point d'abscisse –1 a pour équation $y = 24x + 1$

On peut vérifier à l'aide d'une calculatrice graphique :



Enoncé

(Réglage fenêtre : $X_{min} = -4$ $X_{max} = 3$ graduation = 1 $Y_{min} = -50$ $X_{max} = 10$ graduation = 5)