Fonctions rationnelles

Quelques rappels de cours

- Une fonction rationnelle f est le quotient de deux fonctions polynômes et telle que : $f(x)=\dfrac{p(x)}{q(x)}$ où $p(x)$ et $q(x)$ sont des polynômes avec $q(x)$ **non nul** et de degré supérieur à 1.
- Propriété : si u et v sont dérivables sur I et $v(x)$ non nul sur I, alors $f=\dfrac{u}{v}$ est dérivable sur I et $f'=\dfrac{u'v-uv'}{v^2}$. En particulier, si $f=\dfrac{1}{v}$ alors, $f'=-\dfrac{v'}{v^2}$
- Propriété : toute fonction rationnelle est dérivable sur son ensemble de définition.

Exercice 1

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}-\left\{\frac{1}{2}\right\}$ par $f(x)=\dfrac{-2x^2+6x-7}{2x-1}$

1. a) Calculer la dérivée de la fonction f et vérifier que pour tout $x\in\mathscr{D}_f$: $f'(x)=\dfrac{-4x^2+4x+8}{(2x-1)^2}$

b) Etudier le signe de la dérivée et dresser le tableau de variation de *f*.

2. Etablir l'équation de la tangente à la courbe de f au point d'abscisse 0

3. Déterminer les abscisses éventuelles des points de la courbe où la tangente a pour coefficient directeur 3

☞ Corrigé 1

Exercice 2

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=\dfrac{1}{x^2+2}$

1. Justifier que f est bien définie sur $\mathbb{R}$.

2. a) Calculer la dérivée de la fonction f et vérifier que pour tout $x\in\mathscr{D}_f$: $f'(x)=\dfrac{-2x}{(x^2+2)^2}$

b) Etudier le signe de la dérivée et dresser le tableau de variation de *f*.

3. Etablir l'équation de la tangente à la courbe de f au point d'abscisse 2

☞ Corrigé 2

Exercice 3

Soit f la fonction numérique de la variable réelle x, définie sur $\mathbb{R}\setminus\{1\}$ par : $f(x)=\dfrac{x^3-2x^2}{(x-1)^2}$,

1. a) Montrer que $f(x)$ s'écrit sous la forme : $f(x)=x-\dfrac{x}{(x-1)^2}$ pour tout $x\neq 1$

b) Etudier la position de C par rapport à la droite Δ d'équation y = x.

2. Calculer $f'(x)$ et montrer que $f'(x) = \dfrac{(x^2 - x)(x^2 - 3x + 4)}{(x-1)^4}$.

a) Étudier le signe de $f'(x)$ à l'aide d'un tableau de signes

b) Dresser le tableau de variation de la fonction *f*.

3. a) Déterminer les coordonnées des points d'intersection de C avec les axes du repère.

b) Déterminer l' abscisse du point de la courbe où la tangente est parallèle à la droite Δ.

☞ Corrigé 3

Exercice 4

Partie A

Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}^*$ par $g(x) = a x^2 + \dfrac{b}{x}$ ($a \in \mathbb{R}$; $b \in \mathbb{R}$) et $\mathscr{C}_g$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1. Justifier la dérivabilité de g et calculer $g'(x)$

2. On veut déterminer les réels a et b sachant que la courbe $\mathscr{C}$ de g passe par le point A (–2 ; 6) et admet en ce point une tangente parallèle à l'axe des abscisses.

a) Traduire par une équation le fait que la courbe $\mathscr{C}$ de g passe par le point A (–2 ; 6)

b) Que vaut $g'(-2)$? Traduire par une équation le fait que la courbe $\mathscr{C}$ admet au point A une tangente parallèle à l'axe des abscisses.

c) Ecrire un système d'équations d'inconnues a et b et le résoudre.

Partie B

On considère la fonction *f* définie sur $\mathbb{R}^*$ par : $f(x) = \dfrac{1}{2}x^2 - \dfrac{8}{x}$.

On appelle $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1. Étudier la position relative de $\mathscr{C}$ par rapport à la parabole $\mathscr{P}$ d'équation $y = \dfrac{1}{2}x^2$.

2. Calculer $f'(x)$ et vérifier que pour tout réel non nul, $\dfrac{(x+2)(x^2-2x+4)}{x^2}$

Étudier son signe et dresser le tableau de variation de *f*.

☞ Corrigé 4

Corrigé 1

1. a) f est une fonction rationnelle, donc dérivable sur $\mathscr{D}_f$.

On a $f = \frac{u}{v}$ donc $f' = \dfrac{u'v - uv'}{v^2}$

Avec : $u(x) = -2x^2 + 6x - 7$ donc $u'(x) = -4x + 6$

$v(x) = 2x - 1$ donc $v(x) = 2$

D'où $f'(x) = \dfrac{(-4x+6)(2x-1) - 2(-2x^2+6x-7)}{(2x-1)^2} = \dfrac{-4x^2+4x+8}{(2x-1)^2}$ pour tout $x \in \mathscr{D}_f$

b) Pour tout $x \in \mathscr{D}_f$, $(2x-1)^2 > 0$, donc $f'(x)$ a le signe du numérateur. C'est un trinôme :

$\Delta = b^2 - 4ac = 9$, donc deux racines $x_1 = \dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = 2$ et $x_2 = \dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = -1$

D'où le tableau de variation :

x	$-\infty$		-1		$\frac{1}{2}$		2		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	$\Vert$	$+$	0	$-$	
f		$\searrow$	5	$\nearrow$	$\Vert$	$\nearrow$	-1	$\searrow$	

2. La tangente a une équation de la forme $y = f'(a)(x-a) + f(a)$
On a : a = 0 $f'(a) = f'(0) = 8$ et $f(a) = f(0) = 7$

D'où $y = 8(x-0) + 7$ donc la tangente au point d'abscisse 0 a pour équation $y = 8x + 7$

3. On sait que le coefficient directeur de la tangente est égal au nombre dérivé au point considéré. D'où : $f'(x) = -5$

Ce qui équivaut à $\dfrac{-4x^2+4x+8}{(2x-1)^2} = 3$

Pour $x \neq \frac{1}{2}$, cette équation équivaut à $-4x^2 + 4x + 8 = 3(2x-1)^2$ *(produits en croix)*

Soit $-16x^2 + 16x + 5 = 0$

C'est une équation du second degré : $\Delta = b^2 - 4ac = 576$, donc deux racines

$$x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{5}{4} \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = -\frac{1}{4}$$

Conclusion : ces valeurs n'étant pas interdites, alors, aux points d' abscisses $-\frac{1}{4}$ et $\frac{5}{4}$ la tangente à la courbe a pour coefficient directeur 3.

Enoncé 1

Corrigé 2

1. Etablir l'équation de la tangente à la courbe de f au point d'abscisse 2

1. $f(x)$ existe ssi $x^2+2 \neq 0$. On résout $x^2+2=0$ soit $x^2=-2$; comme un carré ne peut être négatif, alors l'équation n'a pas de solution et donc pas de valeur interdite, d'où $\mathscr{D}_f = \mathbb{R}$
(pour l'équation $x^2+2=0$, on pouvait calculer le discriminant …)

2. a) f est une fonction rationnelle, donc dérivable sur $\mathscr{D}_f$.

On a $f = \frac{1}{v}$ donc $f' = \frac{-v'}{v^2}$ avec : $v(x) = x^2+2$ donc $v'(x) = 2x$

D'où $f'(x) = \frac{-2x}{(x^2+2)^2}$ *(on pouvait également utiliser $f = \frac{u}{v}$…)*

b)) Pour tout $x \in \mathscr{D}_f$, $(x^2+2)^2 > 0$, donc $f'(x)$ a le signe du numérateur.

C'est un polynôme du premier degré : $-2x=0$ ssi $x=0$

D'où le tableau de variation :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
f		↗	$\frac{1}{2}$	↘	

3. La tangente a une équation de la forme $y = f'(a)(x-a) + f(a)$
On a : a = 2 $f'(a) = f'(2) = -\frac{1}{9}$ et $f(a) = f(2) = \frac{1}{6}$

D'où $y = -\frac{1}{9}(x-2) + \frac{1}{6}$ donc la tangente au point d'abscisse 2 a pour équation $y = -\frac{1}{9}x + \frac{7}{18}$

Enoncé 2

Corrigé 3

2. a) Pour tout réel $x \neq 1$, on a $x - \dfrac{x}{(x-1)^2} = \dfrac{x(x-1)^2 - x}{(x-1)^2}$ (même dénominateur)

$$= \frac{x^3 - 2x^2 + x - x}{(x-1)^2}$$

$$= \frac{x^3 - 2x^2}{(x-1)^2}$$

$$= f(x)$$ **CQFD**

c) Pour étudier la position relative de $\mathscr{C}$ par rapport à Δ, on étudie le signe de la différence :

$f(x) - x = \quad x - \dfrac{x}{(x-1)^2} - x = \dfrac{-x}{(x-1)^2}$ (on a pris la forme adaptée pour $f(x)$!)

Pour tout réel $x \neq 1$, $(x-1)^2 > 0$, donc le signe de la différence est celui du numérateur $-x$

On en déduite le tableau de signes et de conséquences

x	$-\infty$ 0	1	‖	$+\infty$
$-x$	+	−	‖	−
différence	+	−	‖	−
conséquence	C au dessus de Δ	C en dessous de Δ	‖	C en dessous de Δ

intersection

3. a) f est une fonction rationnelle dérivable sur $\mathscr{D}_f$.

On a $f = \dfrac{u}{v}$ donc $f' = \dfrac{u'v - v'u}{v^2}$

avec $u(x) = x^3 - 2x^2$ *donc* $u'(x) = 3x^2 - 4x$

et $v(x) = x^2 - 2x + 1$ *donc* $v'(x) = 2x - 2$

D'où <u>pour tout réel x différent de 1</u> :

$$f'(x) = \frac{(3x^2 - 4x)(x-1)^2 - (2x-2)(x^3 - 2x^2)}{(x-1)^4}$$ (*on n'oublie pas la validité* !)

$$f'(x)=\frac{(3x^2-4x)(x-1)^2-2(x-1)(x^3-2x^2)}{(x-1)^4}$$ (*le but est de factoriser pour étudier le signe*)

$$f'(x)=\frac{(x-1)\left[(3x^2-4x)(x-1)-2(x^3-2x^2)\right]}{(x-1)^4}$$

$$f'(x)=\frac{(x-1)(x^3-3x^2+4x)}{(x-1)^4}=\frac{x(x^2-3x+4)(x-1)}{(x-1)^4}$$

$$f'(x)=\frac{(x^2-x)(x^2-3x+4)}{(x-1)^4}$$ CQFD

b) <u>pour tout réel x différent de 1,</u> $(x-1)^4>0$, donc la dérivée a le signe du numérateur

- Pour le trinôme x^2-3x+4 , $\Delta=-7$, donc pas de racine réelle.
- $x^2-x=x(x-1)$ donc la dérivée s'annule pour $x=0$ ou $x=1$

d'où le tableau de signes

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
x^2-x		+	|	−	|	+	
x^2-3x+4		+	|	+	|	+	
$f'(x)$		+	0	−	||	+	

c) Tableau de variation

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
$f'(x)$		+	0	−	||	+	
Variation de f		↗	0	↘	||	↗	$+\infty$

3. a) Les coordonnées des points d'intersection de $\mathscr{C}$ avec l'axe des abscisses vérifient $\begin{cases} y = \frac{x^3-2x^2}{(x-1)^2} \\ y = 0 \end{cases}$

On en déduit l'équation $\frac{x^3-2x^2}{(x-1)^2} = 0$

Pour x différent de 1, cette équation équivaut à successivement à $x^3 - 2x^2 = 0$

$$x^2(x-2) = 0$$

$$x = 0 \text{ ou } x = 2$$

D'où les points d'intersection A (0 ; 0) et B (2 ; 0)

Les coordonnées des points d'intersection de la courbe $\mathscr{C}$ avec l'axe des ordonnées vérifient $\begin{cases} y = \frac{x^3-2x^2}{(x-1)^2} \\ x = 0 \end{cases}$

D'où le point d'intersection A (0 ; 0)

b) La tangente T est parallèle à la droite Δ

ssi leurs coefficient directeurs sont égaux

ssi $f'(x) = 1$ (*le coefficient directeur de la tangente est le nombre dérivé)*

ssi $\frac{(x^2-x)(x^2-3x+4)}{(x-1)^4} = 1$

Pour x différent de 1, cette équation équivaut à successivement à :

$$(x^2-x)(x^2-3x+4) = (x-1)^4$$ (*égalité des produits en croix*)

$$x^4 - 4x^3 + 7x^2 - 4x = x^4 - 4x^3 + 6x^2 - 4x + 1$$

$$x^2 = 1$$

Donc $x = -1$ ou $\cancel{x = 1}$ VI !

Donc au point d'abscisse -1, la tangente à la courbe est parallèle à la droite Δ.

Enoncé 3

Corrigé 4

Partie A

1. La fonction g est une fonction rationnelle dérivable sur $\mathscr{D}_g$.

On a $g(x) = ax^2 + \frac{b}{x}$ D'où pour tout réel x non nul $g'(x) = 2ax - \frac{b}{x^2}$ soit $g'(x) = \frac{2ax^3 - b}{x^2}$

2. La courbe $\mathscr{C}_g$ passe par A (–2 ; 6) donc g(–2)= 6 soit $4a-\frac{1}{2}b=6$

Au point A, la tangente est parallèle à l'axe des abscisses signifie que la tangente a pour coefficient directeur 0 donc

$g'(2)=0$ soit $\frac{-16a-b}{4}=0$

D'où le système $\begin{cases} 4a-\frac{1}{2}b=6 \\ \frac{-16a-b}{4}=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 8a-b=12 \\ -16a-b=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b=8a-12 \\ -16a-(8a-12)=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=\frac{1}{2} \\ b=-8 \end{cases}$

<u>Partie B</u>

1. Pour étudier la position relative de $\mathscr{C}$ par rapport à $\mathscr{P}$, on étudie le signe de la différence $\left[f(x)-\frac{1}{2}x^2\right]=-\frac{8}{x}$ sur $\mathbb{R}^*$

Cette expression a le signe de $-x$ (car $-\frac{8}{x}=\frac{8}{-x}$ et $8>0$)

x	$-\infty$ 0 $+\infty$		
$-x$	+ 0 −		
différence	+		−
conséquence	$\mathscr{C}$ au-dessus de $\mathscr{P}$		$\mathscr{C}$ au-dessous de $\mathscr{P}$

2. a) On a vu dans la partie A que f est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ et que $f'(x)=\frac{x^3+8}{x^2}$ sur $\mathbb{R}^*$

Or , pour tout réel non nul, $\frac{(x+2)(x^2-2x+4)}{x^2}=\frac{x^3+8}{x^2}$, donc $f'(x)=\frac{(x+2)(x^2-2x+4)}{x^2}$

b) Pour tout réel x non nul, $x^2>0$, donc le signe de la dérivée est celui du numérateur

Pour le trinôme x^2-2x+4 , $\Delta=-12$, donc pas de racine réelle et $x^2-2x+4>0$, $\forall x\in\mathbb{R}$. Par conséquent le signe de la dérivée est celui de $x+2$. D'où le tableau de variation

x	$-\infty$		-2		0		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	||	$+$	
Variation de f		↘	6	↗	||	↗	

Enoncé 4