Correction de l'exercice pour les élèves suivant l'enseignement de spécialité FEVRIER 2017

1. Pour tout entier naturel n : $\boldsymbol{u_{n+2} - u_{n+1} = 0,9(u_{n+1} - u_n)}$.

   Démontrer, dans ces conditions, que $u_2 = 5{,}19$.

Donc avec $n = 0$, on obtient $u_2 - u_1 = 0,9(u_1 - u_0) \Leftrightarrow u_2 = u_1 + 0,9(u_1 - u_0)$

$u_2 = 5,1 + 0,9 \times (0,1) = 5,19.$

2. Pour tout entier naturel n, on pose $V_n = \begin{pmatrix} u_{n+1} \\ u_n \end{pmatrix}$ et $A = \begin{pmatrix} 1{,}9 & -0{,}9 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

   a. Démontrer que, pour tout entier naturel n, on a $V_{n+1} = AV_n$.

Pour tout entier naturel n, on a $AV_n = \begin{pmatrix} 1,9 & -0,9 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} u_{n+1} \\ u_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1,9 \times u_{n+1} - 0,9 \times u_n \\ u_{n+1} \end{pmatrix}$

D'après l'énoncé, pour tout entier naturel n :

$u_{n+2} - u_{n+1} = 0,9(u_{n+1} - u_n) \Leftrightarrow u_{n+2} = u_{n+1} + 0,9(u_{n+1} - u_n)$.

Soit $u_{n+2} = 1,9u_{n+1} - 0,9u_n$. Donc , $V_{n+1} = \begin{pmatrix} u_{n+2} \\ u_{n+1} \end{pmatrix} = AV_n$

On admet que, pour tout entier naturel n, on a $V_n = A^n V_0$.

b. $P = \begin{pmatrix} 0{,}9 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. On pose $Q = \begin{pmatrix} -10 & 10 \\ 10 & -9 \end{pmatrix}$

A l'aide de la calculatrice, déterminer la matrice P^{-1}.

En détaillant les calculs, déterminer la matrice D définie par $D = P^{-1}AP$.

$$\boldsymbol{PQ = \begin{pmatrix} 0,9 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -10 & 10 \\ 10 & -9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -9+10 & 9-9 \\ -10+10 & 10-9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I_2}$$

Donc *P* est inversible et $P^{-1} = Q$.

$$\boldsymbol{D = P^{-1}AP = P^{-1}\begin{pmatrix} 1,9 & -0,9 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0,9 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = P^{-1}\begin{pmatrix} 1,71-0,9 & 1,9-0,9 \\ 0,9 & 1 \end{pmatrix} = P^{-1}\begin{pmatrix} 0,81 & 1 \\ 0,9 & 1 \end{pmatrix}.}$$

$$\boldsymbol{D = \begin{pmatrix} -10 & 10 \\ 10 & -9 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0,81 & 1 \\ 0,9 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -8,1+9 & -10+10 \\ 8,1-8,1 & 10-9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,9 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}$$

c. Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, on a

$A^n = PD^nP^{-1}$.

On note (P_n), la propriété : $A^n = PD^nP^{-1}$.

Démontrons par récurrence que pour tout entier naturel n, (P_n) est vraie.

Initialisation : $PD^0P^{-1} = PIP^{-1} = PP^{-1} = I = A^0$ **Donc la propriété (P_0)est vraie.**

Hérédité : On suppose qu'il existe un entier naturel k, tel que la propriété (P_k)est vraie , c'est-à-dire

$A^k = PD^kP^{-1}$ **et démontrons que (P_{k+1}) est vraie.**

On a : $A^{k+1} = A^k \times A = PD^kP^{-1} \times A$ **d'après l'hypothèse de récurrence.**

Or $D = P^{-1}AP$, par multiplication à gauche par la matrice *P* et par multiplication à droite par la matrice P^{-1}. On obtient $PDP^{-1} = PP^{-1}APP^{-1} = IAI = A$

Donc $A^{k+1} = PD^kP^{-1} \times PDP^{-1} = PD^kIDP^{-1} = PD^{k+1}P^{-1}$ la propriété (P_{k+1})est vraie.

Conclusion : On a démontré par récurrence que pour tout entier naturel *n*, on a $A^n = PD^nP^{-1}$.

Pour tout entier naturel n, on admet que

$$A^n = \begin{pmatrix} -10 \times 0{,}9^{n+1} + 10 & 10 \times 0{,}9^{n+1} - 9 \\ -10 \times 0{,}9^n + 10 & 10 \times 0{,}9^n - 9 \end{pmatrix}.$$

d. En déduire que, pour tout entier naturel n, $u_n = 6 - 0{,}9^n$.

On a $V_n = A^nV_0$ avec $V_0 = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5,1 \\ 5 \end{pmatrix}$

$$V_n = \begin{pmatrix} u_{n+1} \\ u_n \end{pmatrix} = A^nV_0 = \begin{pmatrix} -10 \times 0,9^{n+1} + 10 & 10 \times 0,9^{n+1} - 9 \\ -10 \times 0,9^n + 10 & 10 \times 0,9^n - 9 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 5,1 \\ 5 \end{pmatrix}$$

Donc, pour tout entier naturel n, $u_n = (-10 \times 0,9^n + 10) \times 5,1 + (10 \times 0,9^n - 9) \times 5$

$u_n = -51 \times 0,9^n + 51 + 50 \times 0,9^n - 45 = 6 - 0,9^n$.

3. Calculer la taille de la colonie au bout du 10ème jour. On arrondira le résultat à une fourmi près.

$u_{10} = 6 - 0,9^{10} \approx 5,651$ La taille de la colonie au bout du 10ème jour est d'environ 5 651 fourmis.

4. Calculer la limite de la suite (u_n). Interpréter ce résultat dans le contexte.

Si $-1 < q < 1$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} q^n = 0$ Donc $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 6$.

Au bout d'un grand nombre d'années la population de fourmis tendra vers 6000 fourmis.