

Bac blanc de Mathématiques

Durée de l'épreuve : 4 heures

Le sujet comporte 7 pages dont 2 pages de spécialité.

La feuille annexe (page 5) est à rendre avec la copie.

L'exercice de spécialité (pages 6 et 7) est à rédiger sur une copie séparée.

*La qualité de la rédaction et la présentation, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.
L'utilisation d'une seule calculatrice mode examen est autorisée.
Le prêt de calculatrice n'est pas autorisé*

Exercice 1 (4 points) : commun à tous les candidats

On munit le plan complexe d'un repère orthonormé (O, \vec{u}, \vec{v}) .

On note A, B et C les points d'affixes respectives $z_A = 3 + 2i$, $z_B = 1 + i$ et $z_C = 2$.

A tout point M du plan d'affixe z distinct de 2, on associe le point M' d'affixe $z' = \frac{iz}{z-2}$.

- 1) Calculer l'affixe du point A' image du point A .
- 2) Déterminer l'affixe du point D dont l'image est le point B .
- 3) Déterminer les affixes des points invariants c'est-à-dire tels que $M' = M$.
- 4) Déterminer l'ensemble des points du plan tels que $|z'| = 1$.
- 5) Montrer que z' est un imaginaire pur si et seulement si z est réel.

Exercice 2 (5 points) : commun à tous les candidats

Si c'est nécessaire, on arrondira les résultats à 10^{-3} près.

On étudie le trafic sur un tronçon d'autoroute de contournement d'une grande ville. On constate que la moitié des véhicules empruntant cette autoroute sont des camions et que 40 % sont des voitures particulières. Les autres sont des motos.

La société exploitant cette autoroute propose des abonnements aux usagers. On constate que 20 % des conducteurs de camion et 20 % des pilotes de moto se sont abonnés. Par contre 60 % conducteurs de voitures particulières n'ont pas souscrit d'abonnement.

Un véhicule se présente au péage.

On note les événements suivants :

C : " le véhicule est un camion "

V : " le véhicule est une voiture particulière "

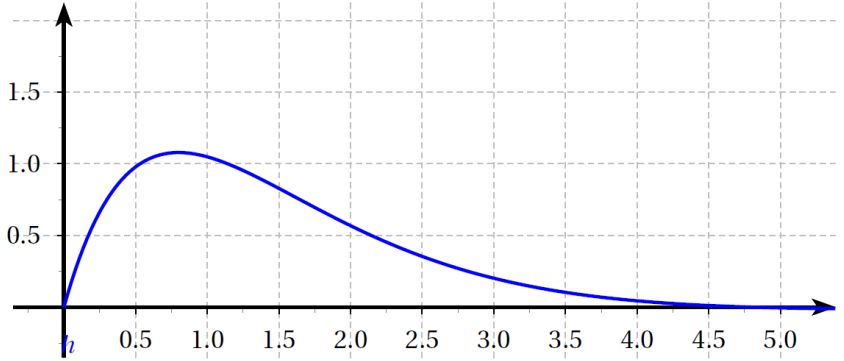
M : " le véhicule est une moto "

A : " le conducteur a souscrit un abonnement "

- 1) Traduire l'énoncé par un arbre pondéré.
- 2)
 - a) Calculer la probabilité que le conducteur soit un camionneur abonné .
 - b) Montrer que la probabilité que le conducteur arrivant au péage ait souscrit un abonnement est 0,28.
 - c) Sachant que le conducteur est un abonné, calculer la probabilité que son véhicule soit une moto.
- 3) Quatre véhicules arrivent au péage, indépendamment les uns des autres.
 - a) Calculer la probabilité que deux véhicules exactement soient ceux de deux abonnés.
 - b) Calculer la probabilité qu'au moins un véhicule soit celui d'un abonné.
- 4) Le tarif pour emprunter ce tronçon d'autoroute est de 2 euros pour une moto, 5 euros pour un camion et 4 euros pour une voiture particulière. L'abonnement permet d'obtenir une réduction de 20 %.
 - a) Montrer que la prix payé par un motard abonné est de 1,60 euros.
 - b) On note S la variable aléatoire égale à la somme payée par le conducteur.
Etablir la loi de probabilité de la variable aléatoire S .
 - c) Calculer la somme payée en moyenne par véhicule quand un grand nombre de véhicules se présente au péage.

Exercice 3 (5 points) : commun à tous les candidats

Un groupe de sociologues se charge d'étudier l'évolution de la propagation d'une fausse nouvelle (« fake news ») : la théorie de la « Terre Plate ». Un message est envoyé par tweet à l'instant 0, et f est la fonction, définie sur $[0; +\infty[$, dont la courbe ci-dessous représente l'évolution du nombre (en millions) de re-tweet de ce message en fonction du temps (en jours)



Partie A

- 1) Conjecturer la valeur du maximum de la fonction ainsi que sa limite en $+\infty$.
- 2) Conjecturer les variations de la fonction f et dresser le tableau de signes de sa dérivée.

Partie B

La fonction est définie sur $[0; +\infty[$ par $f(x) = (3,6x - 0,75x^2)e^{-x}$.

- 1) On admet que $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^2} = +\infty$.

Déterminer la limite de f en $+\infty$. Que peut-on en déduire ?

- 2) Calculer $f'(x)$ et démontrer que $f'(x)$ est du signe de $0,75x^2 - 5,1x + 3,6$.
- 3) Dresser le tableau de variations de f .
- 4) a) On admet que l'équation $f(x) = 0,5$ admet une unique solution $\alpha \approx 0,17$ dans $[0 ; 0,8[$.
Justifier que l'équation $f(x) = 0,5$ admet une unique solution β dans $[0,8 ; +\infty[$.
On donnera une valeur approchée β de à 10^{-2} près.
- b) On dira d'un tweet qu'il fait un « ramdam » (buzz en anglais) si en moins de 2 jours, le nombre de re-tweet dépasse 500 000.
Ce tweet fera-t-il un ramdam ?

Exercice 4 (6 points) : Pour les candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

Une espèce d'oiseaux ne vit que sur deux îles A et B d'un archipel.

Au début de l'année 2018, 20 millions d'oiseaux de cette espèce sont présents sur l'île A et 10 millions sur l'île B. Des observations sur plusieurs années ont permis aux ornithologues d'estimer que, compte tenu des naissances, décès et migrations entre les deux îles, on retrouve au début de chaque année les proportions suivantes :

- Sur l'île A : 80 % du nombre d'oiseaux présents sur l'île A au début de l'année précédente et 30 % du nombre d'oiseaux présents sur l'île B au début de l'année précédente ;
- Sur l'île B : 20 % du nombre d'oiseaux présents sur l'île A au début de l'année précédente et 70 % du nombre d'oiseaux présents sur l'île B au début de l'année précédente.

Pour tout entier naturel n , on note a_n (respectivement b_n) le nombre d'oiseaux (en millions) présents sur l'île A (respectivement sur l'île B) au début de l'année $2018+n$.

On a donc $a_0 = 20$ et $b_0 = 10$.

- 1) Expliquer pourquoi le problème se traduit par le système suivant :
$$\begin{cases} a_{n+1} = 0,8a_n + 0,3b_n \\ b_{n+1} = 0,2a_n + 0,7b_n \end{cases}$$

2) A l'aide d'un tableur, on obtient le tableau de valeurs ci-contre :

	A	B	C
1	n	a_n	b_n
2	0	20	10
3	1	19	11
4	2	18,5	11,5
5	3	18,25	11,75
6	4	18,125	11,875
7	5	18,062	11,937

- a) Quelle formule faut-il entrer dans la cellule B3 et recopier vers le bas pour remplir la colonne B ?
- b) Quelle conjecture peut-on émettre sur l'éventuelle convergence des suites ?
- 3) On définit la suite (c_n) pour tout entier naturel n par $c_n = a_n + b_n$.
- a) Montrer que la suite (c_n) est constante et en déduire que pour tout entier naturel n , $b_n = 30 - a_n$
- b) En déduire que pour tout entier naturel n , $a_{n+1} = 0,5a_n + 9$
- 4) a) Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n , $a_n \geq 18$.
- b) Etudier le sens de variation de la suite (a_n) .
- c) En déduire que la suite (a_n) converge.
- 5) On définit la suite (v_n) pour tout entier naturel n par $v_n = a_n - 18$.
- a) Démontrer que la suite (v_n) est une suite géométrique dont on précisera la raison et le premier terme.
- b) En déduire que pour tout entier naturel n , $a_n = 18 + \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$.
- c) Quelle est la limite de la suite (a_n) ?
- 6) L'algorithme ci-dessous permet de déterminer la plus petite valeur de l'entier n à partir de laquelle a_n est inférieure ou égale à 18,01.
- a) Compléter cet algorithme où n est un entier naturel et a un réel.

```
n ← 0
a ← 20
Tant que a .....
    a ← .....
    n ← .....
Fin Tant que
```

- b) Que contient la variable n à la sortie de cet algorithme ?