BILAN n°4 : LES SAVOIR-FAIRE SUR LA DERIVATION PARTIE 2

Les techniques de dérivation sont fondamentales pour la terminale.

Il faut connaître le tableau des dérivées remarquables et les formules de dérivation. Apprends on étudie ….

- **Connaître le tableau des dérivées**
- **Connaître la dérivée de la fonction $\boldsymbol{u \times v}$, $\boldsymbol{\frac{1}{v}}$, $\boldsymbol{\frac{u}{v}}$ et $\boldsymbol{g(ax+b)}$**

$$(\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v})' = \boldsymbol{u}' \times \boldsymbol{v} + \boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v}' \quad \text{et} \quad \boldsymbol{v} \neq \mathbf{0} \ \left(\frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{v}}\right)' = \frac{-\boldsymbol{v}'}{\boldsymbol{v}^2} \quad \left(\frac{\boldsymbol{u}}{\boldsymbol{v}}\right)' = \frac{\boldsymbol{u}' \times \boldsymbol{v} - \boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v}'}{\boldsymbol{v}^2}$$

Si g est une fonction dérivable alors la fonction $f : x \longmapsto g(ax+b)$ est dérivable et :

$\boldsymbol{f'(x) = a \times g'(ax+b)}$ **(ce théorème sera admis)**

- **Savoir étudier une fonction dans un problème ou sur un graphique**

<u>PLAN D'ATTAQUE SUR UN PROBLEME DE DERIVATION EN 6 ETAPES</u>

❶ Dériver la fonction $\boldsymbol{f}$.

❷ Déterminer <u>la ou les valeurs qui annulent la fonction dérivée $\boldsymbol{f'}$.</u>

❸ Etablir le tableau de signe de la fonction dérivée $\boldsymbol{f'}$.

❹ En déduire les variations de la fonction $\boldsymbol{f}$ à partir du signe de la dérivée $\boldsymbol{f'}$.

❺ Calculer les images par la fonction $\boldsymbol{f}$ pour finir de compléter le tableau de variation.

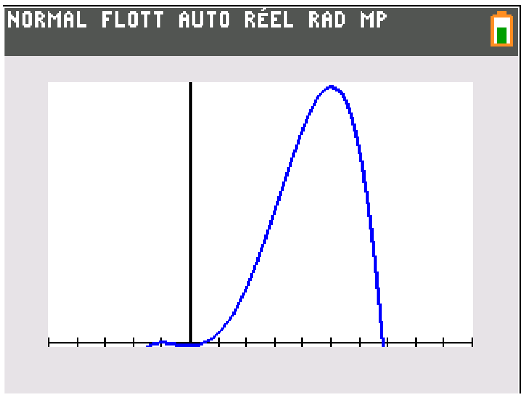
❻ Donner la valeur maximale de l'image ou la valeur minimale de l'image par la fonction $\boldsymbol{f}$ suivant la question posée.

Ayez le bon réflexe ! Avant de commencer à étudier la fonction, la représenter graphiquement sur sa calculatrice. Cela permet de vérifier les résultats de son étude.

<u>Exemple 1 :</u>

La fonction f définie par $f(x) = -3x^4 + 16x^3 + 30x^2 - 7$ admet-elle un maximum sur $\mathbb{R}$?
Si oui, donner sa valeur.

<u>Premier réflexe : on représente la fonction à la calculatrice.</u>



BILAN n°4 : LES SAVOIR-FAIRE SUR LA DERIVATION PARTIE 2

❶ f est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme fonction polynôme. On calcule $f'(x)$.

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad f'(x) = -12x^3 + 48x^2 + 60x = \boldsymbol{x(-12x^2 + 48x + 60)}$$

❷ On détermine les valeurs qui annulent f'.

$$\boldsymbol{f'(x) = 0} \Leftrightarrow x = 0 \quad ou \quad -12x^2 + 48x + 60 = 0$$

$$\Delta = 48^2 - 4 \times 60 \times (-12) = 5184 = 72^2 > 0$$

$$x_1 = \frac{-48 - 72}{-24} = 5 \qquad\qquad x_2 = \frac{-48 + 72}{-24} = -1$$

f' s'annule **en $\boldsymbol{x = -1, x = 5}$** et $\boldsymbol{x = 0}$. Il y aura donc trois valeurs à indiquer dans le tableau.

❸ - ❹ - ❺ On dresse le tableau de signes de $f'(x)$ et le tableau de variation de f.

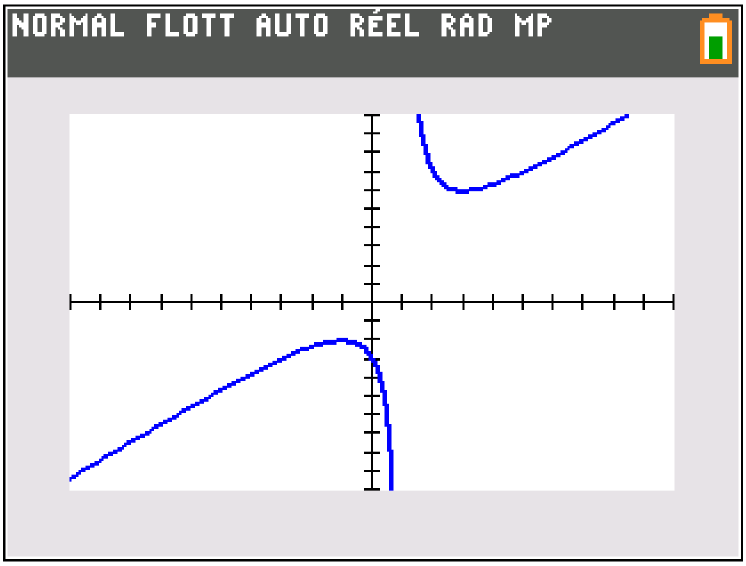
x	$-\infty$		-1		0		5		$+\infty$
x		$-$		$-$	0	$+$		$+$	
$-12x^2 + 48x + 60$		$-$	0	$+$		$+$	0	$-$	
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$		↗	4	↘	-7	↗	868	↘	

❻ D'après les variations de f, f admet un maximum en 5, qui vaut 868.

<u>Exemple 2 :</u>

La fonction h est définie sur $\mathbb{R} - \{1\}$ par $h(x) = \frac{x^2+3}{x-1}$. Etudier les variations de h.

<u>Premier réflexe : on représente la fonction à la calculatrice.</u>



BILAN n°4 : LES SAVOIR-FAIRE SUR LA DERIVATION PARTIE 2

❶ h est une fonction rationnelle, elle est dérivable sur son ensemble de définition. h est donc dérivable sur $\mathbb{R} - \{1\}$.

$\boldsymbol{h = \frac{u}{v}}$ **avec** $\boldsymbol{u(x) = x^2 + 3}$ $\boldsymbol{u'(x) = 2x}$

$\boldsymbol{v(x) = x - 1}$ $\boldsymbol{v'(x) = 1}$

$$\forall x \in \mathbb{R} - \{1\} \qquad h'(x) = \frac{2x(x-1)-1(x^2+3)}{(x-1)^2} = \frac{2x^2-2x-x^2-3}{(x-1)^2} = \boldsymbol{\frac{x^2-2x-3}{(x-1)^2}}$$

❷ $\boldsymbol{h'(x) = 0}$ $\Leftrightarrow x^2 - 2x - 3 = 0$ et $(x-1)^2 \neq 0$

On résout $x^2 - 2x - 3 = 0$.

$$\Delta = (-2)^2 - 4 \times 1 \times (-3) = 4 + 12 = 16 > 0$$

$$x_1 = \frac{2-4}{2} = -1 \qquad\qquad x_2 = \frac{2+4}{2} = 3$$

h' s'annule en $\boldsymbol{x = -1}$ et $\boldsymbol{x = 3}$, la valeur interdite est $x = 1$. Il y aura donc trois valeurs à indiquer dans le tableau.

❸ - ❹ - ❺ Comme $(x-1)^2 > 0$ pour tout $x \in \mathbb{R} - \{1\}$, h' dépend du signe de $x^2 - 2x - 3$.

x	$-\infty$		-1		1		3		$+\infty$
signe de $h'(x)$		$+$	0	$-$	$\|\|$	$-$	0	$+$	
variation de h		$\nearrow$	-2	$\searrow$	$\|\|$	$\searrow$	6	$\nearrow$	

❻ Sur l'intervalle $]-\infty; 1[$ la fonction h admet un maximum égal à -2 atteint en $x = -1$.

Sur l'intervalle $]1; +\infty[$ la fonction h admet un minimum égal à 6 atteint en $x = 3$.

<u>Exemple 3 : PROBLEME D'OPTIMISATION</u>

Une entreprise fabrique une quantité q d'un certain produit, q est exprimé en tonnes et varie de 0 à 20.

Le coût total de production est, en milliers d'euros :

$$C(q) = q^3 - 30q^2 + 300q$$

1. La production est vendue intégralement au prix de 84 000 € l'unité. La recette totale, en milliers d'euros est donc $R(q) = 84q$.

Etudier le signe $B(q) = R(q) - C(q)$ puis interpréter le résultat en termes de bénéfice.

2. Pour quelle valeur, le bénéfice est-il maximal ? Donner une valeur approchée à 0,1 près.

Correction :

1. $B(q) = R(q) - C(q) = 84q - q^3 + 30q^2 - 300q = -q^3 + 30q^2 - 216q$

La fonction B est dérivable sur $[0\,;\ 20]$.

$$\forall q \in [0\,;20] \quad B'(q) = -3q^2 + 60q - 216$$

On résout $B'(q) = 0 \Leftrightarrow -3q^2 + 60q - 216 = 0$

$$a = -3\,; b = 60\,;\ c = -216$$

$$\Delta = b^2 - 4 \times a \times c = 60^2 - 4 \times (-3) \times (-216) = 1\,008$$

Il y a deux solutions distinctes à l'équation :

$$q_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2 \times a} = \frac{-60 - \sqrt{1\,008}}{-6} = 10 + 2\sqrt{7} \approx 15{,}3 \in [0\,;20]$$

$$q_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2 \times a} = \frac{-60 + \sqrt{1\,008}}{-6} = 10 - 2\sqrt{7} \approx 4{,}7 \notin [0\,;20]$$

q	10		$10+2\sqrt{7}$		20
$signe\ de\ B(q)$		$+$	0	$-$	
$variation\ de\ B$	-160	↗	$B(10+2\sqrt{7})$	↘	-320

Il y a un bénéfice maximum pour l'entreprise.

2. Le bénéfice est maximal pour $x = 10 + 2\sqrt{7}$, c'est-à-dire pour environ 15,3 tonnes produits.