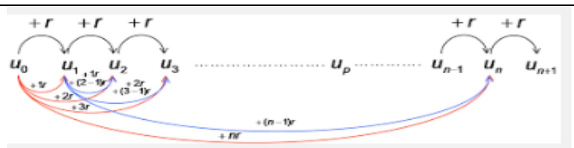
BILAN n°6 :LES SAVOIR-FAIRE SUR LES SUITES

Arithmétique, géométrique, par récurrence, forme explicite, les expressions en fonction de n … encore beaucoup de vocabulaire à apprendre, de formules à maitriser !!

Quand utiliser les formules ? Et lesquelles ? Des questions… ici les réponses

➢ **Connaître la définition d'une suite arithmétique (utiliser pour démontrer)**

$$\boldsymbol{u_{n+1} = u_n + r}$$



➢ **Savoir calculer les termes d'une suite arithmétique (pour exprimer en fonction de n)**

Une suite (u_n) est arithmétique de raison r :

- **Si le terme initial est u_0 alors pour tout $n \in \mathbb{N}$ $u_n = u_0 + n \times r$**

Exemple 1 : (u_n) est arithmétique de raison 3 et de premier terme 4.

$$(n = 10) \qquad u_{10} = u_0 + 10 \times r = 4 + 10 \times 3 = 4 + 30 = 34$$

- **Si le terme initial est quelconque alors pour tout $m \in \mathbb{N}, p \in \mathbb{N}$ $u_m = u_p + (m-p) \times r$**

Exemple 2 : (u_n) est arithmétique de raison 5 et de premier terme $u_1 = 2$.

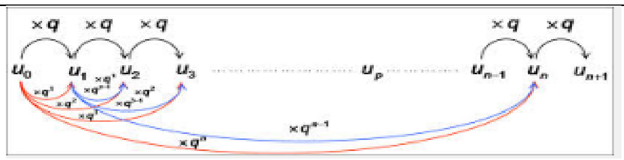
$$(m = 20, p = 1) \qquad u_{20} = u_1 + (20-1) \times r = 2 + 19 \times 5 = 2 + 95 = 97$$

➢ **Savoir calculer la somme des termes consécutifs d'une suite arithmétique**

$$\boldsymbol{S = \frac{nombre\ de\ termes \times (1er\ terme + dernier\ terme)}{2}}$$

➢ **Connaître la définition d'une suite géométrique (utiliser pour démontrer)**

$$\boldsymbol{u_{n+1} = u_n \times q}$$



➢ **Savoir calculer les termes d'une suite géométrique (pour exprimer en fonction de n)**

Une suite (u_n) est géométrique de raison q :

- **Si le terme initial est u_0 alors pour tout $n \in \mathbb{N}$ $u_n = u_0 \times q^n$**

Exemple 3 : (u_n) est géométrique de raison 3 et de premier terme 4.

$$(n = 5)\ \ u_5 = u_0 \times q^5 = 4 \times 3^5 = 4 \times 243 = 972$$

- **Si le terme initial est quelconque alors pour tout $m \in \mathbb{N}, p \in \mathbb{N}$ $u_m = u_p \times q^{m-p}$**

Exemple 4 : (u_n) est arithmétique de raison 2 et de premier terme $u_1 = 5$.

$$(m = 9, p = 1)\ \ u_9 = u_1 \times q^{9-1} = 5 \times 2^8 = 5 \times 256 = 1280$$

➢ **Savoir calculer la somme des termes consécutifs d'une suite géométrique**

$$\boldsymbol{S = 1er\ terme \times \frac{1 - q^{Nombre\ de\ termes}}{1 - q}}$$

➢ **Savoir utiliser le mode SUITE de la calculatrice**

➢ **Savoir calculer avec des pourcentages**

Augmenter de t % revient à multiplier par $\left(1 + \frac{t}{100}\right)$ <u>ex</u> : augmenter de 30 %, on multiplie par 1,30.

Diminuer de t % revient à multiplier par $\left(1 - \frac{t}{100}\right)$ <u>ex :</u> diminuer de 15 %, on multiplier par 0,85.

➢ **Plan d'attaque pour résoudre un problème sur les suites**

<u>Partie A : Etude d'une suite numérique</u>

On considère la suite (u_n) définie, pour tout entier naturel n, par : $\begin{cases} u_0 = 20 \\ u_{n+1} = \frac{9}{10}u_n + 3 \end{cases}$.

1. a) Calculer u_1 et u_2.

Les termes d'une suite par récurrence, tu sauras calculer

On utilise la relation de récurrence donnée :

$$\boldsymbol{u_1 = \frac{9}{10}u_0 + 3 = \frac{9}{10} \times 20 + 3 = 21}$$

$$\boldsymbol{u_2 = \frac{9}{10}u_1 + 3 = \frac{9}{10} \times 21 + 3 = 21,9}$$

b) La suite (u_n) peut-elle être arithmétique ? Peut-elle être géométrique ? Justifier.

Je ne suis ni arithmétique, ni géométrique

$$\boldsymbol{\begin{cases} u_1 - u_0 = 21 - 20 = 1 \\ u_2 - u_1 = 21,9 - 21 = 0,9 \end{cases} \quad u_1 - u_0 \neq u_2 - u_1}$$

(u_n) n'est donc pas arithmétique (car on obtient pas une constante)

$$\boldsymbol{\begin{cases} \frac{u_1}{u_0} = 1,05 \\ \frac{u_2}{u_1} \approx 1,04 \end{cases} \quad \frac{u_1}{u_0} \neq \frac{u_2}{u_1}}$$

(u_n) n'est donc pas géométrique (car on obtient pas une constante)

BILAN n°6 :LES SAVOIR-FAIRE SUR LES SUITES

2. On considère la suite (v_n) définie pour tout entier naturel n, par $v_n = u_n - 30$.
   a) Calculer v_0.

$\boldsymbol{v_0 = u_0 - 30 = 20 - 30 = -10.}$ **(on remplace juste n par 0)**

   b) Démontrer que la suite (v_n) est une suite géométrique de raison $\frac{9}{10}$.

$\forall\, n \in \mathbb{N}\ v_{n+1} = u_{n+1} - 30$ **or** $u_{n+1} = \frac{9}{10}u_n + 3$

$v_{n+1} = \frac{9}{10}u_n + 3 - 30$ **or** $u_n = v_n + 30$

$v_{n+1} = \frac{9}{10}(v_n + 30) - 27 = \frac{9}{10}u_n + 27 - 27$

Donc $\forall\, n \in \mathbb{N}\ v_{n+1} = \frac{9}{10}v_n$

(v_n) **est géométrique de raison** $q = \frac{9}{10}$ **et de premier terme** $v_0 = -10$.

Géométrique ? Il faut donc montrer que $v_{n+1} = v_n \times q$

   c) Exprimer v_n en fonction de n.

$\forall\, n \in \mathbb{N}\ v_n = v_0 \times q^n = -10 \times \left(\frac{9}{10}\right)^n.$

   d) En déduire que, pour tout entier naturel n, $u_n = -10 \times \left(\frac{9}{10}\right)^n + 30$

Comme $u_n = v_n + 30$ **donc** $\forall\, n \in \mathbb{N}\ u_n = -10 \times \left(\frac{9}{10}\right)^n + 30$

Je peux calculer n'importe quel terme de la suite

3. Calculer la somme des termes $S = v_3 + v_4 + v_5 + \cdots + v_{87}$ et $S' = u_3 + u_4 + u_5 + \cdots + u_{87}$

S est la somme des termes consécutifs d'une suite géométrique

Le premier terme est $v_3 = -10 \times \left(\frac{9}{10}\right)^3 = -7,29$

La raison est $q = \frac{9}{10}$ **et il y a** $87 - 3 + 1 = 85$ **termes.**

$$S = -7,29 \times \frac{1 - \left(\frac{9}{10}\right)^{85}}{1 - \frac{9}{10}} = -7,29 \times \frac{1 - \left(\frac{9}{10}\right)^{85}}{\frac{1}{10}} = -7,29 \times 10 \times \left[1 - \left(\frac{9}{10}\right)^{85}\right]$$

Donc $S = -72,9 \times \left[1 - \left(\frac{9}{10}\right)^{85}\right]$.

$$S' = (v_3 + 30) + (v_4 + 30) + (v_5 + 30) + \cdots + (v_{87} + 30)$$

BILAN n°6 :LES SAVOIR-FAIRE SUR LES SUITES

$$S' = v_3 + v_4 + v_5 + \cdots + v_{87} + 30 + 30 + 30 + \cdots + 30$$

$$S' = S + 30 \times 85$$

$$S' = -72,9 \times \left[1 - \left(\frac{9}{10}\right)^{85}\right] + 2\,550$$

<u>Partie B : Application à une situation</u>

En 2010, la ville de Rosacité compte 20 000 habitants.
Les études démographiques ont montré que le nombre d'habitants de cette ville pouvait être modélisé par la suite (u_n) étudiée dans la partie A.
Ainsi, $u_0 = 20$ correspond au nombre d'habitants exprimé **en milliers** en 2010.
Le terme u_n correspond au nombre d'habitants, <u>en milliers</u>, pour l'année 2010 + n.

1. Calculer le nombre d'habitants de cette ville en 2015.

2015 = 2010 + 5. Ici $n = 5$, on calcule donc le terme u_5.

D'après la partie A : $u_5 = = -10 \times \left(\frac{9}{10}\right)^5 + 30 = 24,0951$. En 2015 il y aura environ 24 095 habitants.

2. Le maire de Rosacité obtiendra des subventions quand sa ville dépassera les 25 000 habitants.

a) Recopier et compléter l'algorithme suivant afin de déterminer le nombre d'années nécessaires à partir de 2010 pour que la ville dépasse les 25 000 habitants.

$U \leftarrow \mathbf{20}$
$N \leftarrow \mathbf{0}$
Tant que $\boldsymbol{U} \leq \mathbf{25}$
 $U \leftarrow \frac{\mathbf{9}}{\mathbf{10}} \times \boldsymbol{U} + \mathbf{3}$
 $N \leftarrow \boldsymbol{N} + \mathbf{1}$
Fin Tant que

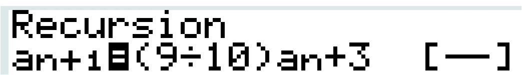
b) En quelle année, le maire touchera-t-il des subventions ?

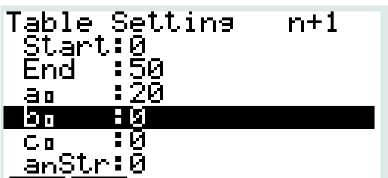
On cherche n tel que $u_n > 25$.

A la calculatrice on obtient : $u_6 \approx 24,7$ et $u_7 \approx 25,2$.

Donc on obtient $n = 7$. Le maire touchera ses subventions en 2017 (2010 + 7).

<u>SUR CASIO</u>





<u>SUR TI</u>