BILAN n°9 : PRODUIT SCALAIRE

Un peu de géométrie avec le produit de vecteurs, dans un plan,

Avec des angles, avec des coordonnées, avec des projetés orthogonaux…

Beaucoup de théorèmes pour une notion essentielle !!!!!

- **Le produit scalaire du vecteur $\vec{u}$, par le vecteur $\vec{v}$ noté $\vec{u}.\vec{v}$ est <u>un nombre réel</u>.**

Un joli scalaire !

➢ **Connaître les théorèmes et leur utilisation suivant les exercices**

- **Si dans un repère orthonormal, $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ont pour coordonnées respectives $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ alors :**

$$\vec{u}.\vec{v} = x \times x' + y \times y'.$$

<u>Exemple :</u> $\vec{u}\begin{pmatrix} 3 \\ -5 \end{pmatrix}$ *et* $\vec{v}\begin{pmatrix} -2 \\ 10 \end{pmatrix}$

$$\vec{u}.\vec{v} = 3 \times (-2) + (-5) \times 10 = -56$$

- **Soient $\overrightarrow{OA}$ et $\overrightarrow{OB}$ deux vecteurs non nuls, alors $\overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OB} = OA \times OB \times cos\,(\widehat{AOB})$.**

<u>Exemple :</u> $OA = 5$, $OB = 4$, $\widehat{AOB} = 60°$

$$\overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OB} = OA \times OB \times cos\,(\widehat{AOB}) = 5 \times 4 \times cos\,(60°) = 20 \times \frac{1}{2} = 10$$

<u>Remarques :</u> si $\overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OB} > 0$ alors $0 < \widehat{AOB} < 90°$

si $\overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OB} > 0$ alors $90° < \widehat{AOB}$

- **Si les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires et de même sens, alors $\vec{u}.\vec{v} = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\|$**

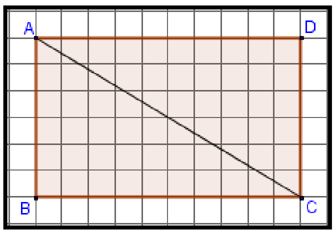
- **Si les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires et de sens contraire, alors $\vec{u}.\vec{v} = -\|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\|$**

- **$\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont deux vecteurs, C et D se projettent orthogonalement en C' et D' sur la droite (AB).**

Alors $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{C'D'}$.

On dit que $\overrightarrow{C'D'}$ est le projeté orthogonal de $\overrightarrow{CD}$ sur (AB).

Pour calculer le produit scalaire $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CD}$, on peut remplacer $\overrightarrow{CD}$ par son projeté orthogonal sur (AB).



<u>Exemple :</u> Le rectangle $ABCD$ a pour dimensions 3 cm et 5 cm.

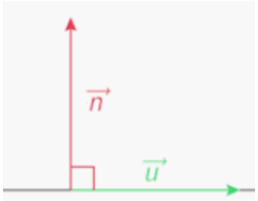
$$\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AD}.\overrightarrow{AD} = AD^2 = 5^2 = 25$$

On projette orthogonalement $\overrightarrow{AC}$ sur la droite (AD).

➢ Vecteurs orthogonaux

$\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont deux vecteurs non nuls. Ils sont dits orthogonaux si les droites (AB) et (CD) sont perpendiculaires.

Par convention, le vecteur nul est orthogonal à tout autre vecteur.



➢ Démontrer l'orthogonalité de vecteurs

Deux vecteurs non nuls $\vec{u}$ et $\vec{n}$ sont orthogonaux si et seulement si $\vec{u}.\vec{n} = 0$.

Exemple : $\vec{u}\begin{pmatrix}8\\2\end{pmatrix}$ *et* $\vec{v}\begin{pmatrix}1\\-4\end{pmatrix}$

$$\vec{u}.\vec{v} = 8 \times 1 + 2 \times (-4) = 0$$

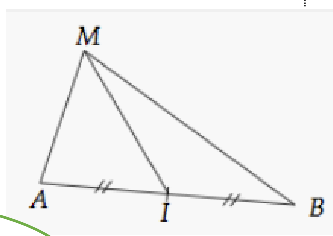
Les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux.

➢ Les applications du produit scalaire

① Théorème de la médiane

➢ A et B sont des points du plan et I le milieu de $[AB]$, alors pour tout point M on a :

$$MA^2 + MB^2 = 2MI^2 + \frac{AB^2}{2}$$



Par analogie on en déduit les formules :

➢ A et C sont des points du plan et I le milieu de $[AC]$, alors pour tout point M on a :

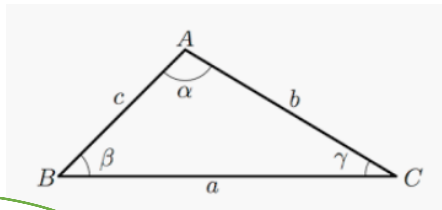
$$MA^2 + MC^2 = 2MI^2 + \frac{AC^2}{2}$$

Pour calculer la longueur d'une médiane, c'est ce théorème, compris !!

➢ B et C sont des points du plan et I le milieu de $[BC]$, alors pour tout point M on a :

$$MB^2 + MC^2 = 2MI^2 + \frac{BC^2}{2}$$

② Théorème d'Al-Kashi



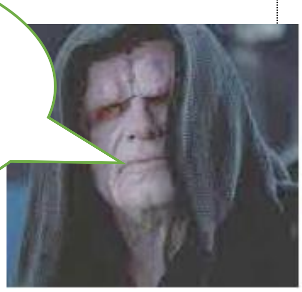
➢ Dans un triangle ABC :

$$BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2 \times AB \times AC \times \cos \widehat{BAC}$$

Par analogie on en déduit les formules :

➢ $AC^2 = BA^2 + BC^2 - 2 \times BA \times BC \times \cos \widehat{ABC}$

On connaît deux longueurs et un angle, alors c'est Al-Kashi pour trouver la 3ème longueur, le côté obscur du triangle !!



➢ $AB^2 = CA^2 + CB^2 - 2 \times CA \times CB \times \cos \widehat{ACB}$

③ Caractérisation d'un cercle

Etant donnés deux points distincts A et B, un point M du plan est sur le cercle de diamètre $[AB]$ si et seulement si $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB} = 0$.